



Universidade Estadual de Maringá
Pós-Graduação em Física

Gustavo Vinicius Bassi Lukasiewicz

Modelo teórico das técnicas de lente térmica e
espelho térmico com acoplamento térmico
Amostra-Fluido

Orientador: Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne

Maringá - Agosto de 2011



Universidade Estadual de Maringá
Pós-Graduação em Física

Gustavo Vinicius Bassi Lukasiewicz

Modelo teórico das técnicas de lente térmica e
espelho térmico com acoplamento térmico
Amostra-Fluido

Dissertação apresentada ao Departamento de
Física da Universidade Estadual de Maringá para
a obtenção do título de mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne

Maringá - Agosto de 2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

L954 Lukasiewicz, Gustavo Vinicius Bassi
 Modelo teórico das técnicas de lente térmica e
 espelho térmico com acoplamento térmico Amostra-
 Fluido. / Gustavo Vinicius BassiLukasiewicz. --
 Maringá, 2011.
 63 f.: il., col., tabs, figs.

 Orientador: Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
 Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
 Física, Programa de Pós-Graduação em Física.

 1. Fenômenos fototérmicos. 2. Lente térmica. 3.
 Espelho térmico. 4. Acoplamento térmico. I.
 Malacarne, Luis Carlos, orient. II. Universidade
 Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas,
 Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em
 Física. III. Título.

535.843 CDD 21.ed.

AHS-000022

Dedico aos meus queridos pais:

Jorge e Izabel

Agradecimentos

Foram muitos os que me ajudaram a concluir este trabalho. Agradeço:

À minha família. Meus pais, Jorge e Izabel, pelos cuidados, incentivo, amor e pelo exemplo que são para mim. Ao meu irmão Rodrigo, pela amizade e por todo o apoio e motivação;

À Liz, namorada e amiga, pelo carinho, compreensão e paciência durante a realização deste trabalho;

Ao Marcelino e a Ironi, pessoas incríveis, sempre dispostos a ajudar no que for necessário;

Ao meu orientador, professor Luis Carlos Malacarne, pela motivação e dedicação neste trabalho, pela amizade e pelo exemplo de profissional que é para mim;

Ao professor Pedreira, pela orientação ao longo da graduação, acompanhando minhas primeiras idas aos laboratórios;

Aos professores Nelson e Ervin pela amizade e contribuições dedicadas neste trabalho;

Aos professores Medina e Jurandir, pelas conversas, amizade e por manterem os laboratórios funcionando;

Ao professores Mauro e Bento, pela contribuição para a formação de todos os alunos do grupo;

Aos professores Rênio, Evangelista e César pelas discussões essenciais realizadas nas disciplinas do curso;

Aos professores Mauro Mewes e Cláudio Ichiba pelo incentivo a iniciação a pesquisa ainda no ensino médio;

Aos amigos Murilo, Wilson, Munique e Edson por tornarem a convivência em casa tão agradável;

Aos amigos Bruno, Derick, Elton, Israel, Lucas, Pablo e Renato pelas conversas animadas no intervalo das aulas;

Aos amigos do grupo: Aline, Ana, Angela, Carioca, Fran Sato, Francine, Giselly, Gutierrez, Hilton, José Renato, Junior, Leandro, Marcelo, Marcio, Marcos Paulo, Nilson, Otávio, Robson, Rogério, Rony, Roseli, Tai, Vinicius, Vitor e Wesley pelas conversas e risadas;

Aos amigos Angel, Rodolfo, Haroldo e Roberto pela companhia agradável na sala da pós.

Aos servidores e técnicos da UEM: Akiko, Márcio, Jurandir, Serginho e Marquinhos pela colaboração;

Às agências de fomento, CNPq, Capes e Fundação Araucária, pelo apoio financeiro;

Enfim, a todos que contribuíram de uma forma direta ou indireta para a execução deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo teórico das técnicas de Lente Térmica (LT) e Espelho Térmico (ET) resolvido no tempo levando em consideração o acoplamento térmico entre amostra e o fluido. A equação de difusão de calor considerando fluxo de calor na interface amostra-fluido foi resolvida para obter uma solução semi-analítica para a temperatura na amostra e no fluido. A solução encontrada para temperatura, considerando amostras com pequena absorção óptica, foi comparada com o resultado obtido utilizando Método de Elementos Finitos (MEF). Um *software* que utiliza MEF fornece soluções numéricas para a equação de difusão de calor com condições de contorno realistas impostas pela geometria experimental. Os resultados encontrados por meio de MEF apresentaram ótima concordância com a nossa solução. Verificou-se que a transferência de calor de um vidro padrão para o ar não introduz diferença relevante na mudança de fase do feixe de prova induzido pela amostra quando comparado com a solução sem fluxo de calor. Porém, a contribuição de LT criada pelo ar que circunda a amostra corresponde a aproximadamente 2% do efeito de lente térmica da amostra. Quando água é utilizada como fluido circundante à amostra, um efeito significativo de mudança de fase surge tanto na amostra como no fluido.

Abstract

This work presents a theoretical study to take the heat transfer within the heated sample and out to the surroundings medium into account in the time resolved thermal lens and thermal mirror experiments. We solve the diffusion equations with heat flux boundary condition to obtain a semi-analytical solution for the temperature in the sample and in the surrounding fluid. In the low optical absorption case, the semi-analytical solution is used to model the thermal lens effects and the results are compared with the finite element analysis (FEA) software solution. Finite element analysis software provides numerical solutions to the heat transfer equations with realistic boundary conditions imposed by the experimental geometry. The FEA modeling results were found to be in excellent agreement with our solutions. The heat transferred to the air coupling fluid does not introduce any important effect in the sample phase shift when compared to the solution obtained without considering heat flux. The contribution from the thermal lens created in the air coupling fluid corresponds to approximately 2% of the sample's TL effect. When water is used as fluid the heat coupling leads to a more significant effect in both sample and fluid phase shift.

Sumário

Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
1. Introdução	1
1.1 Espectroscopia de Lente Térmica.....	2
1.2 Espectroscopia de Espelho Térmico.....	5
1.3 Propagação do feixe de prova.....	8
2. Gradiente de temperatura	12
3. Perfil de deslocamento	34
3.1 Equação de Poisson.....	38
3.2 Equação Biharmônica.....	40
4. Modelo teórico para a lente térmica e espelho térmico	49
4.1 Lente Térmica.....	49
4.2 Espelho Térmico.....	57
5. Conclusão	60
Referências Bibliográficas	61

Capítulo 1

Introdução

O efeito fototérmico consiste na mudança do estado térmico da amostra induzido por uma radiação eletromagnética. A energia absorvida de um feixe luminoso e não reemitida resulta em um aumento da energia interna na amostra e conseqüentemente um aumento de temperatura na amostra e no fluido ao seu redor. A mudança de temperatura resulta em mudanças dos parâmetros termodinâmicos relacionados com a temperatura, tanto na amostra quanto no fluido. Medidas da temperatura, pressão, ou variação de densidade que ocorrem devido à absorção óptica são à base dos métodos fototérmicos [1]. A intensidade dos fenômenos fototérmicos depende das propriedades da amostra e do fluido em sua volta, como a densidade (ρ), a condutividade térmica (k), o calor específico (c), o coeficiente de absorção óptica (A_e), o coeficiente de expansão térmico linear (α_T), a razão de Poisson (ν), entre outras.

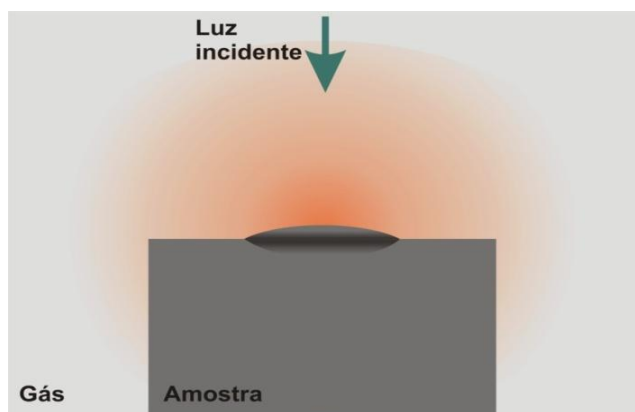


Figura 1.1 – Luz incidindo sobre uma amostra produzindo o efeito fototérmico [2].

O desenvolvimento do laser possibilitou uma drástica mudança nos procedimentos utilizados no estudo da interação da radiação com a matéria. Uma das características é produzir uma região bem definida de aquecimento devido a sua distribuição espacial de intensidade.

Técnicas fototérmicas induzidas por laser (deflexão fototérmica [3], Z-scan [4], efeito miragem [5], lente térmica [6-8] e espelho térmico [9,10]) são frequentemente utilizadas para determinar propriedades térmicas, ópticas e mecânicas de materiais. Neste trabalho, as técnicas de espectroscopia de lente térmica e espelho térmico são estudadas considerando o acoplamento térmico entre amostra e fluido [11].

1.1 Espectroscopia de Lente Térmica

A Espectroscopia de Lente Térmica (ELT) é uma técnica fototérmica remota, não destrutiva e de alta sensibilidade para medidas de absorção óptica e propriedades termo-ópticas de materiais com baixa absorção óptica. Esta técnica tem sido aplicada na caracterização de vários tipos de materiais como vidros [8, 12], cristais [13], óleos[14], biodiesel [15], polímeros [16] e proteínas [17].

O efeito de lente térmica foi observado pela primeira vez por Gordon e colaboradores em 1964 [6]. Ao inserir as amostras no interior da cavidade de um laser de He-Ne foi observado que a intensidade no centro do feixe variava em uma escala temporal da ordem de milisegundos. A duração deste transiente sugeriu que este efeito era de origem térmica, e não eletrônica.

De acordo com o modelo teórico proposto pelos pesquisadores para explicar o efeito, a energia absorvida pela amostra gera um aumento de temperatura e uma consequente variação do índice de refração, a qual por sua vez afeta a propagação do feixe óptico. Ou seja, um efeito térmico gera uma divergência ou convergência (dependendo do sinal da variação do índice de refração com a temperatura) do feixe laser, por esse motivo o efeito foi denominado Lente Térmica (LT).

Várias configurações experimentais de LT foram propostas nas últimas décadas [18]. Contudo, trataremos neste trabalho apenas o modelo proposto por Shen e colaboradores [7], que é largamente utilizado atualmente. Nesta configuração são utilizados dois feixes luminosos no modo descasado¹. Um dos feixes (laser de excitação) de onda contínua, TEM_{00} gaussiano, incide sobre uma amostra fracamente absorvedora, formando uma lente térmica. O segundo feixe (laser de prova), quase colinear com o feixe de excitação, com as mesmas características do primeiro, atravessa a amostra provando a lente térmica criada pelo primeiro feixe. A posição da primeira superfície da amostra é estabelecida como a origem das coordenadas ($z = 0$) e a direção do eixo z é definida como a direção do eixo óptico do laser de prova. A cintura do feixe de prova é localizada a uma distância Z_1 da amostra e o plano do detector a uma distância Z_2 , como mostra a Figura 1.2. O raio na cintura do feixe de prova é ω_{0p} , o raio do feixe de prova e do feixe de excitação na amostra é ω_{1p} e ω_{0e} respectivamente.

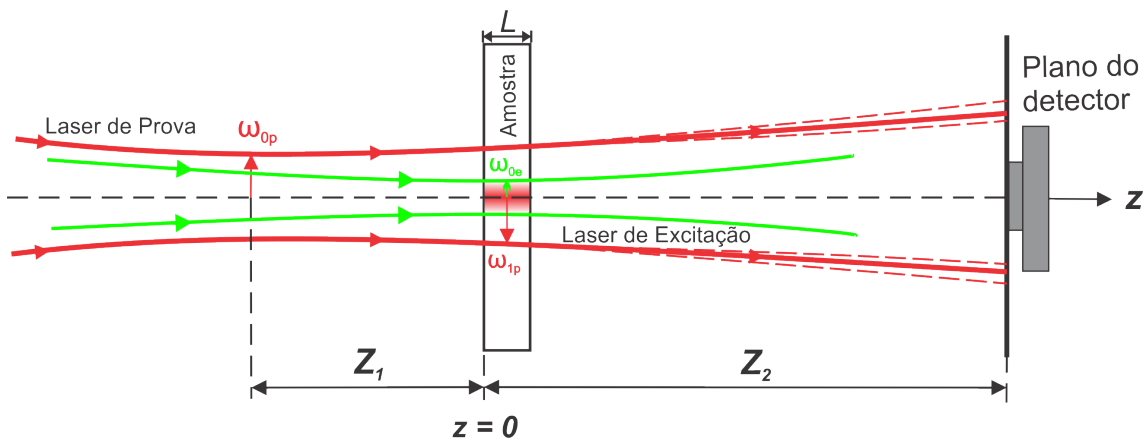


Figura 1.2 – Esquema da posição geométrica dos feixes em um experimento de LT em modo descasado.

Neste experimento, monitoramos a intensidade do centro do feixe de prova que atravessa a amostra utilizando um fotodiodo. Quando o feixe de excitação incide na amostra, ocorre uma divergência ou convergência dos feixes luminosos.

¹ A técnica de LT no modo descasado utiliza dois feixes laser com raios diferentes na posição da amostra.

Monitoramos a variação da intensidade no centro do feixe de prova em função do tempo, obtendo dados que, ajustados com o modelo teórico, fornecem informações relacionadas às propriedades da amostra.

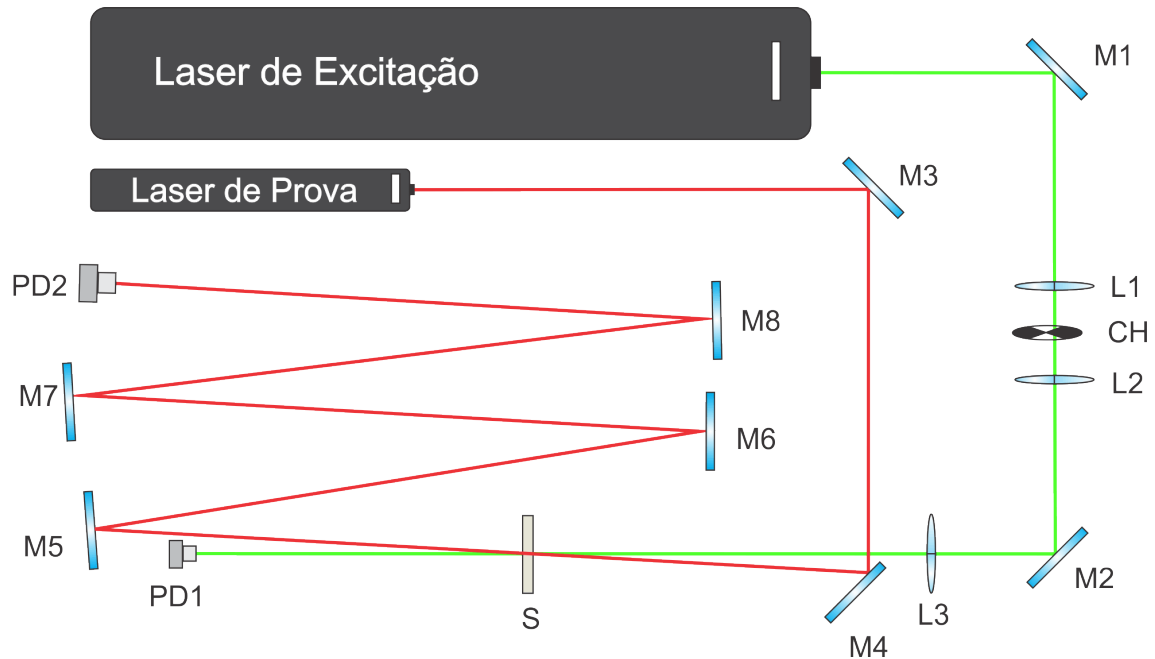


Figura 1.3 – Configuração experimental para a técnica de lente térmica. M_i representa um espelho plano, L_i uma lente convergente, PD_i o fotodetector, CH o modulador mecânico e S a amostra.

O modelo de LT proposto por Shen e colaboradores [7] explica a dependência temporal do fenômeno com a temperatura, considerando uma amostra de baixa absorção, sem fluxo de calor para o meio e induzido por laser de onda contínua. Uma modelagem teórica considerando a condução de calor entre amostra e fluido, utilizando fonte de excitação contínua para amostra de baixa absorção será apresentada neste trabalho e o resultado obtido comparado com a solução numérica obtida utilizando o método dos elementos finitos por meio do *software Comsol Multiphysics 3.5a*.

1.2 Espectroscopia de Espelho Térmico

A Espectroscopia de Espelho Térmico (EET) é uma técnica fototérmica remota e não destrutiva para medidas de propriedades termo-ópticas-estruturais de materiais sólidos, com qualquer coeficiente de absorção óptica. Logo, esta técnica pode ser utilizada para caracterizar materiais semitransparentes e opacos. Esta técnica tem sido aplicada na caracterização de vidros [9, 10, 20], metais [20] e polímeros [21].

O efeito de Espelho Térmico (ET) ocorre quando um feixe de excitação incide na amostra, parte da energia do feixe é absorvida gerando aumento de temperatura na amostra, resultando em uma deformação superficial. Um segundo feixe (laser de prova), quase colinear com o feixe de excitação, têm parte de sua intensidade refletida na primeira superfície da amostra. Quando o feixe de excitação incide na amostra e deforma a superfície, o feixe de prova passa a ter sua frente de onda distorcida por esta deformação, causando uma alteração em sua fase. Dependendo da natureza do material sólido há a formação de um espelho térmico convexo ou côncavo na superfície da amostra, divergindo ou convergindo o feixe de prova respectivamente, Figura 1.4.

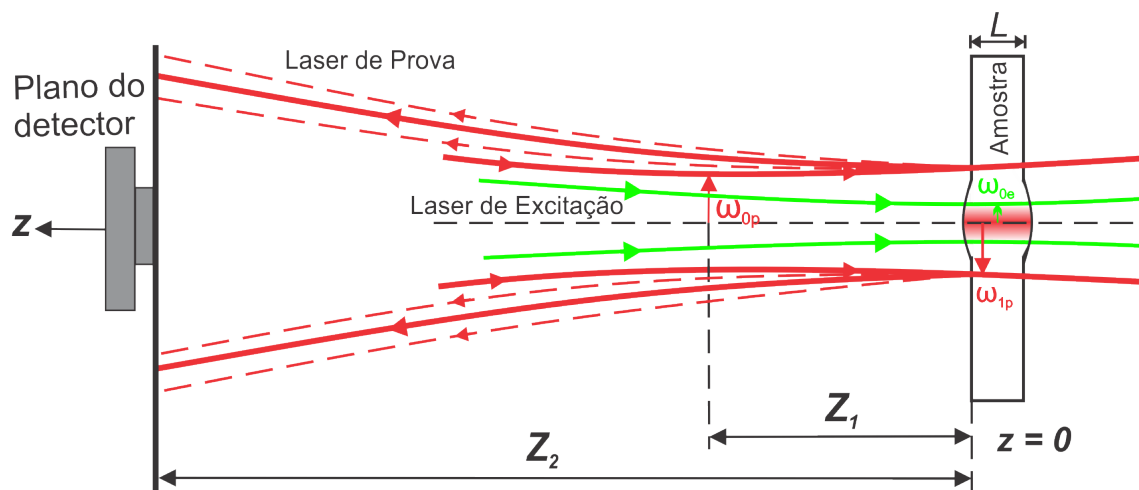


Figura 1.4 - Formação de espelho térmico convexo na superfície da amostra.

Analogamente ao caso da LT, monitoramos com um fotodiodo (localizado a uma distância Z_2 da amostra) a intensidade do centro do feixe de prova que reflete na primeira superfície da amostra, obtendo dados que, ajustados com o modelo teórico, fornecem informações relacionadas às propriedades da amostra.

Os arranjos experimentais das técnicas de LT e ET são semelhantes, conforme mostram as Figuras 1.3 e 1.5. A diferença básica é que no ET a porção do feixe de prova monitorado é aquela refletida na primeira superfície da amostra e não a porção transmitida. Dessa maneira, podemos ver o ET como uma técnica complementar a de LT, o que é muito conveniente do ponto de vista experimental, visto que ambas podem ser montadas com os mesmos equipamentos.

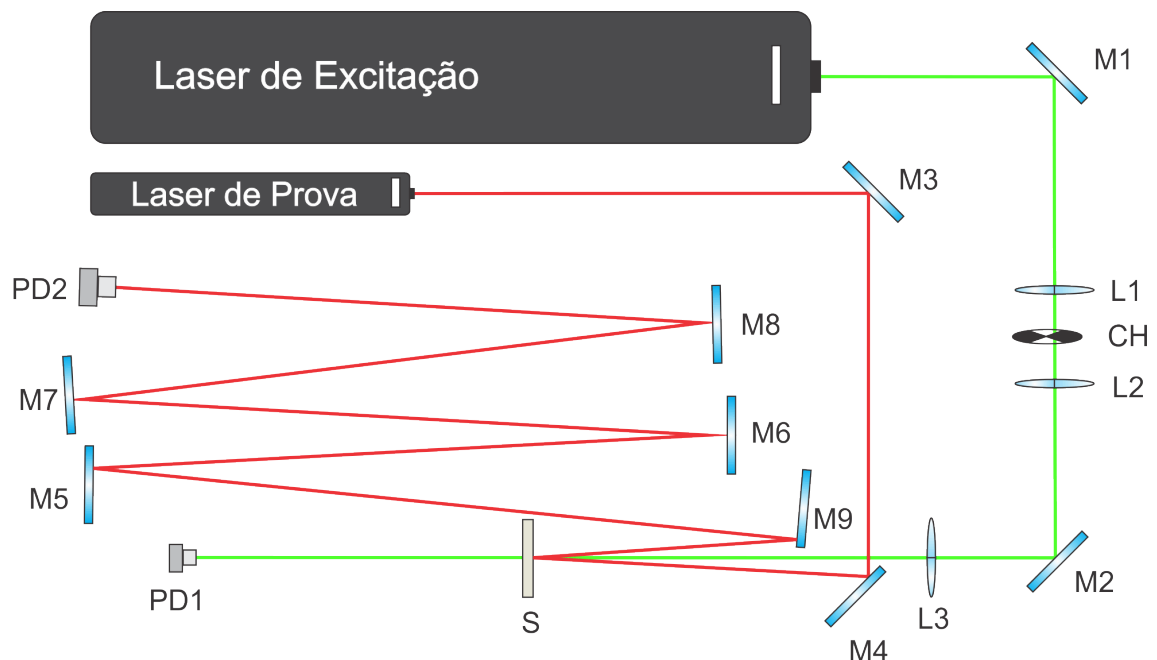


Figura 1.5 – Configuração experimental para a técnica de espelho térmico. M_i representa um espelho plano, L_i uma lente convergente, PD_i o fotodetector, CH o modulador mecânico e S a amostra.

O procedimento teórico para obtenção do modelo de lente térmica e espelho térmico pode ser dividido nas seguintes etapas.

1. A equação de difusão de calor deve ser resolvida para as condições de contorno particulares do sistema para encontrar uma expressão para o aumento local da temperatura $T(\mathbf{r}, t)$.

2. Para a ELT, a distribuição de temperatura é utilizada para calcular a variação de caminho óptico induzido no feixe de prova. No caso do espelho térmico, deve-se encontrar o perfil de deformação gerado na amostra devido ao aumento de temperatura utilizando a equação termoelástica [22, 23].
3. A teoria de difração de Fresnel é utilizada para calcular a intensidade do campo elétrico resultante no plano do detector, considerando a mudança de fase induzida no feixe de prova.

Para derivar o modelo teórico algumas considerações devem ser observadas:

- 1) A amostra é homogênea;
- 2) A espessura da amostra é pequena comparada com as distâncias confocais dos lasers, isso garante que o diâmetro do feixe não varie significativamente dentro da amostra;
- 3) A dimensão radial da amostra deve ser maior que o diâmetro dos feixes lasers, ω_{1p} e ω_{0e} , para que não ocorram efeitos de bordas;
- 4) O coeficiente de variação do caminho óptico com a temperatura, ds/dT , se mantém constante com a mudança de temperatura ao longo da amostra;
- 5) O laser de prova não deve gerar aumento significativo de temperatura na amostra;
- 6) A intensidade da LT não pode ser suficiente para induzir uma mudança no perfil do feixe de prova dentro da amostra.

Nos últimos anos, vários trabalhos relacionados ao modelo teórico de ET têm sido feitos pelo Grupo de Estudos de Fenômenos Fototérmicos (GEFF); modelo de espelho térmico considerando amostra semi-infinita, baixa absorção, com fonte de excitação contínua gaussiana TEM_{00} [9]; modelo para amostra semi-infinita para qualquer coeficiente de absorção utilizando fonte gaussiana contínua [24]; modelo teórico com fonte de excitação contínua tipo degrau [25]; modelo teórico de espelho térmico para amostra finita, baixa absorção e fonte de excitação gaussiana [26]. Neste trabalho apresentaremos o modelo de espelho térmico considerando fluxo de calor entre amostra e fluido [11] para o caso de amostra com baixa absorção (absorção do feixe luminoso é uniforme ao longo do eixo z) utilizando fonte de excitação contínua

gaussiana. Este estudo demonstra ser importante para estimar o efeito de lente térmica formada no fluido adjacente a amostra, além de possibilitar a aplicação das técnicas para o estudo das propriedades físicas de fluidos transparentes usando-se amostra padrão como fonte geradora do gradiente térmico no fluido.

1.3 Propagação do feixe de prova

Durante uma medida de LT ou ET monitoramos a intensidade do centro do feixe de prova no plano do detector. As mudanças ocorridas na amostra devido ao feixe de excitação induzem uma mudança de fase na frente de onda do feixe de prova, acarretando em uma variação de intensidade no centro do feixe. Para obtermos uma expressão para tal grandeza, devemos encontrar a amplitude do campo elétrico do centro do feixe de prova utilizando a teoria de difração de Fresnel. A amplitude do campo elétrico no centro do feixe de prova com perfil gaussiano, na posição do fotodetector, localizado a uma distância Z_2 da amostra, pode ser escrita como [7, 18]

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C \int_0^{\infty} e^{-(1+iV)g} e^{-i\Phi(g,t)} dg, \quad (1.1)$$

com $g = (r / \omega_{1p})^2$,

$$C = B \frac{i\pi\omega_{1p}^2}{\lambda_p Z_2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_p} Z_2},$$

e

$$V = \frac{Z_1}{Z_c} + \frac{Z_c}{Z_2} \left[1 + \left(\frac{Z_1}{Z_c} \right)^2 \right],$$

no qual Z_1 é a distância do foco do feixe de prova até a amostra, Z_c é a distância confocal do feixe de prova e λ_p é o comprimento de onda do feixe de prova. V é um

parâmetro geométrico da montagem experimental das técnicas de ET e LT. $\Phi(g, t)$ é a diferença de fase induzida no laser de prova.

Na técnica de lente térmica a fase induzida é dada pela diferença de caminhos ópticos percorrido pelo feixe de prova vezes o número de ondas, ou seja,

$$\Phi_{LT}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \int \Delta s(r, z, t) dz, \quad (1.2)$$

em que $\Delta s(r, z, t)$ é a variação do caminho óptico do feixe de prova devido ao aquecimento gerado pelo feixe de excitação.

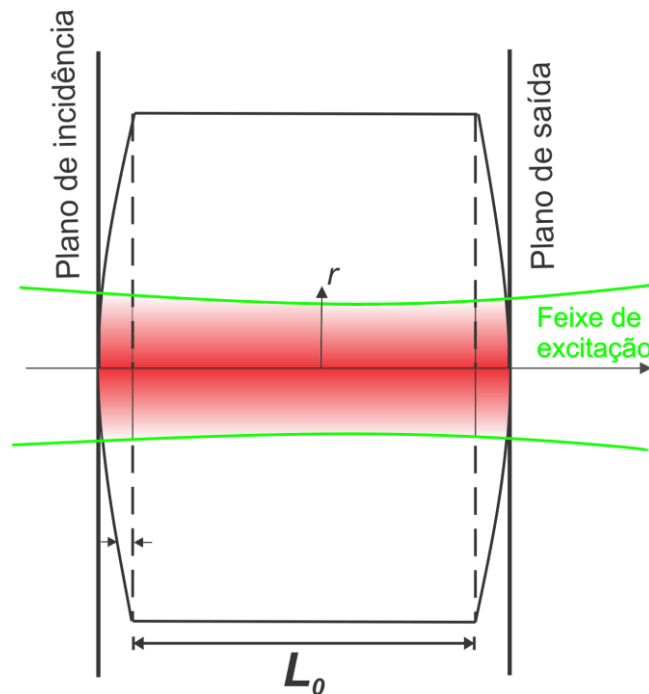


Figura 1.6 – Representação da variação do caminho óptico na amostra na aproximação de fluxo nulo. O índice de refração e a espessura da amostra podem variar, resultando em uma mudança do caminho óptico.

A variação do comprimento do caminho óptico é dada por

$$\Delta s(r, z, t) = s(r, z, t) - s(0, z, t). \quad (1.3)$$

Expandindo $s(r, z, t)$ em função da temperatura obtemos

$$s(r, z, t) = s_0 + \frac{ds}{dT} T(r, z, t), \quad (1.4)$$

em que $T(r, z, t)$ é o aumento de temperatura e s_0 é o caminho óptico na temperatura inicial. As expressões (1.3) e (1.4) nos conduz a relação

$$\Delta s(r, z, t) = \frac{ds}{dT} [T(r, z, t) - T(0, z, t)]. \quad (1.5)$$

Substituindo a equação (1.5) em (1.2) obtemos, na aproximação de fluxo nulo,

$$\Phi_{LT}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^L [T(r, z, t) - T(0, z, t)] dz, \quad (1.6)$$

sendo $\frac{ds}{dT}$ o coeficiente de variação do caminho óptico com a temperatura. Para o caso de baixa absorção podemos reescrever a equação acima como

$$\Phi_{LT}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} 2 \int_0^{L/2} [T(r, z, t) - T(0, z, t)] dz, \quad (1.7)$$

pois a temperatura é uma função par em torno de $L/2$.

Se a amostra é um fluido, o $\frac{ds}{dT}$ é igual ao $\frac{dn}{dT}$ (taxa de variação do índice de refração com a temperatura) e a equação acima se torna

$$\Phi_{LT}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{dn}{dT} 2 \int_0^{L/2} [T(r, z, t) - T(0, z, t)] dz, \quad (1.8)$$

Com L sendo a espessura da cubeta.

Na técnica de espelho térmico, a superfície deformada atua como um elemento óptico causando uma diferença de fase na frente de onda do laser refletido. Esta diferença de fase é dada por duas vezes a deformação da superfície vezes o número de onda

$$\Phi_{ET}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2u_z(r, 0, t), \quad (1.9)$$

em que $u_z(r,0,t)$ é a componente z do vetor deslocamento na superfície da amostra no instante t . Neste caso, a diferença de fase do feixe de prova no ET depende diretamente da deformação superficial, e essa deformação depende da temperatura na amostra. Também podemos escrever a diferença de fase como

$$\Phi_{ET}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2[u_z(r,0,t) - u_z(0,0,t)]. \quad (1.10)$$

Na primeira definição, equação (1.9), a diferença de fase é relativa à superfície da amostra antes do efeito, $u_z(0,0,0) = 0$. Já na definição (1.10), ela é relativa ao pico da deformação no tempo t , $u_z(0,0,t)$. A diferença entre as duas definições é um fator de fase constante em um tempo t e não introduz mudança no resultado final para a intensidade do feixe de prova no plano do detector.

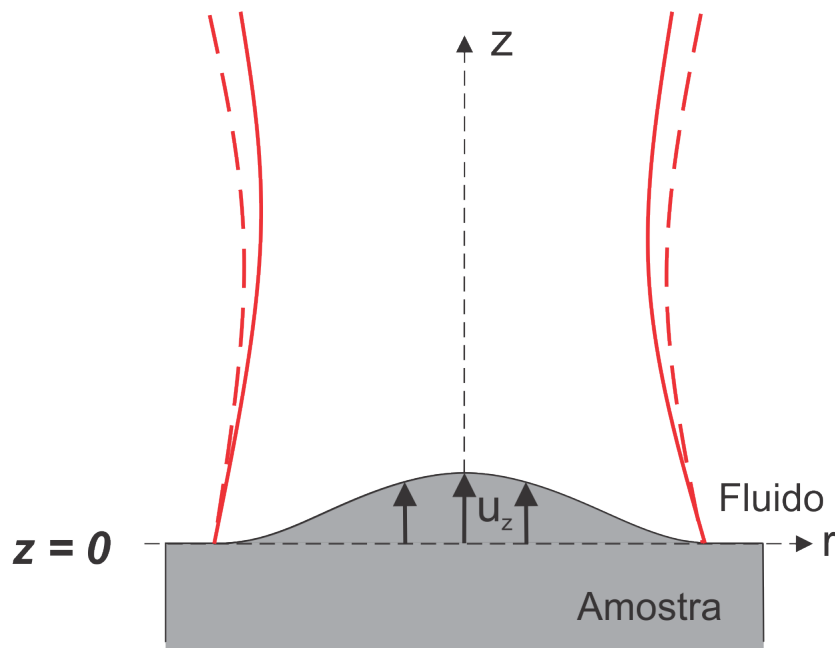


Figura 1.7 – Representação da deformação superficial na amostra gerando mudança de fase no feixe de prova.

A intensidade do centro do feixe de prova no plano do detector é $I(t) = |U(Z_1 + Z_2, t)|^2$, com $\Phi(r,t)$ dado pela equação (1.6) para a lente térmica e pela equação (1.9) ou (1.10) para o espelho térmico.

Capítulo 2

Gradiente de temperatura

Neste capítulo resolveremos a equação de difusão de calor para uma fonte de calor gaussiana e contínua considerando a troca de calor entre amostra e o meio adjacente. O resultado obtido é comparado com a solução numérica obtida utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) com o *software Comsol Multiphysics 3.5a*.

Assumindo que a amostra é espessa o suficiente de forma que os efeitos na interface ocorrem numa região menor que $L/2$, para analisar o efeito de acoplamento térmico amostra-fluido podemos considerar dois meios semi-infinitos com a interface em $z=0$. Usaremos o referencial no qual a amostra encontra-se em $0 < z < \infty$ e o fluido em $-\infty < z < 0$. O perfil de temperatura gerado pelo laser de excitação na amostra, $T_s(r, z, t)$, e no fluido, $T_f(r, z, t)$, é descrito pelas equações de difusão de calor

$$\frac{\partial T_s(r, z, t)}{\partial t} - D \nabla^2 T_s(r, z, t) = Q(r, z, t) \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\partial T_f(r, z, t)}{\partial t} - D_f \nabla^2 T_f(r, z, t) = 0. \quad (2.2)$$

Vamos assumir que inicialmente a temperatura na amostra e no fluido é homogênea e não há variação de temperatura em $t=0$. Além disso, consideramos que a amostra é radialmente grande o suficiente para que o aquecimento gerado pelo laser de

excitação não alcance a borda da amostra. Isso deve acontecer se as dimensões radiais do feixe de excitação forem muito menores que as dimensões radiais da amostra. Desta forma, as condições inicial e de contorno podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 k \frac{\partial T_s(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= k_f \frac{\partial T_f(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} \\
 T_s(r, 0, t) &= T_f(r, 0, t) \\
 T_s(r, z, 0) &= T_f(r, z, 0) = 0 \\
 T_s(\infty, z, t) &= T_s(r, \infty, t) = 0 \\
 T_f(\infty, z, t) &= T_f(r, -\infty, t) = 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $D_i = k_i / \rho_i c_i$ é a difusividade térmica do material i (amostra e fluido). c_i , ρ_i , k_i são o calor específico, a densidade de massa e a condutividade térmica do material i , respectivamente. As duas primeiras relações levam em conta a continuidade da temperatura e do fluxo de calor na interface ($z=0$). As expressões restantes estão relacionadas à condição inicial e às condições de contorno nas bordas.

O termo de fonte pode ser escrito como $Q(r, z, t) = Q_0 \exp\left(-2r^2 / \omega_{0e}^2\right) e^{-A_e z}$, com $Q_0 = \frac{2P_e A_e \phi}{\pi c \rho \omega_{0e}^2}$, sendo A_e o coeficiente de absorção óptico no comprimento de onda do feixe de excitação, P_e é a potência do laser de excitação, ω_{0e} é o raio do feixe de excitação na amostra. ϕ é a fração de energia absorvida convertida em calor, sendo que no caso de não haver re-emissão da energia absorvida e toda energia for convertida em calor, temos $\phi = 1$.

Observe que estamos considerando excitação contínua de forma que o termo de fonte não depende do tempo. De um modo geral, na maioria dos materiais há um decaimento na intensidade da fonte obedecendo à lei de Beer, $Q(z) = e^{-A_e z}$. No entanto, para nossos propósitos, consideramos o coeficiente de absorção óptico pequeno, de modo que a aproximação $A_e \rightarrow 0$ pode ser aplicada para obter a expressão para a temperatura do sistema. Belançon [2] mostrou que para $A_e \leq 100 m^{-1}$ esta aproximação gera erros menores do que 3% na difusividade térmica encontrada do ajuste teórico.

Para obter as soluções $T_s(r, z, t)$ e $T_f(r, z, t)$ podemos utilizar o método de transformadas. Este método consiste em obter uma equação mais simples por meio de transformadas, resolver esta nova equação e então calcular a transformada inversa da solução, obtendo a solução original.

Utilizamos as transformadas de Laplace na variável temporal e de Hankel na variável radial. A transformada de Hankel é apropriada devido à simetria radial, visto que o operador derivativo se transforma em uma constante no espaço de Hankel.

A Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.4)$$

e possui as seguintes propriedades

$$\mathcal{L}\left[\frac{dT(t)}{dt}\right] = sT(s) - T(t=0) \quad (2.5)$$

e

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}. \quad (2.6)$$

Aplicando a transformada de Laplace nas equações diferenciais (2.1) e (2.2) e utilizando as condições iniciais (2.3) obtemos

$$sT_s(r, z, s) - \cancel{T_s(r, z, 0)} - D\nabla^2 T_s(r, z, s) = \frac{1}{s} Q_0 \exp\left(-2r^2/\omega_{0e}^2\right) e^{-A_e z}, \quad (2.7)$$

$$sT_f(r, z, s) - \cancel{T_f(r, z, 0)} - D_f \nabla^2 T_f(r, z, s) = 0. \quad (2.8)$$

No sistema de coordenadas cilíndricas o laplaciano pode ser escrito como [27]

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.9)$$

Substituindo a equação (2.9) nas equações (2.7) e (2.8) obtemos

$$sT_s(r, z, s) - D\nabla_r^2 T_s(r, z, s) - D \frac{\partial^2 T_s(r, z, s)}{\partial z^2} = \frac{1}{s} Q_0 e^{-\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2}} e^{-A_e z}, \quad (2.10)$$

$$sT_f(r, z, s) - D_f \nabla_r^2 T_f(r, z, s) - D_f \frac{\partial^2 T_f(r, z, s)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.11)$$

Podemos aplicar a transformada de Hankel na variável radial, essa transformada possui a propriedade de modificar o operador derivativo ∇_r^2 em uma constante no espaço de Hankel.

A Transformada de Hankel de uma função $f(r)$ e sua inversa são definidas como

$$\mathfrak{H}[f(r)] = F(\alpha) = \int_0^\infty f(r) J_0(\alpha r) r dr \quad (2.12)$$

e

$$\mathfrak{H}^{-1}[f(\alpha)] = f(r) = \int_0^\infty f(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad (2.13)$$

em que J_n é a função de Bessel de primeira espécie.

A transformada de Hankel possui a seguinte propriedade

$$\{\nabla_r^2\}f(r) = \{\partial_{r,r} + r^{-1}\partial_r\}f(r) = \int_0^\infty [-\alpha^2 f(\alpha)] J_0(\alpha r) \alpha d\alpha = \mathfrak{H}^{-1}\{-\alpha^2 f(\alpha)\}, \quad (2.14)$$

ou seja,

$$\mathfrak{H}\left\{\left(\partial_{r,r} + r^{-1}\partial_r\right)f(r)\right\} = -\alpha^2 f(\alpha). \quad (2.15)$$

Aplicando a transformada de Hankel nas equações (2.10) e (2.11) obtemos

$$sT_s(\alpha, z, s) + \alpha^2 D T_s(\alpha, z, s) - D \frac{\partial^2 T_s(\alpha, z, s)}{\partial z^2} = \frac{1}{s} Q_0 \left(\frac{\omega_{0e}^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2 \alpha^2} \right) e^{-A_e z}, \quad (2.16)$$

$$sT_f(\alpha, z, s) + \alpha^2 D_f T_f(\alpha, z, s) - D_f \frac{\partial^2 T_f(\alpha, z, s)}{\partial z^2} = 0, \quad (2.17)$$

pois

$$\mathfrak{H}\left[e^{-\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2}}\right] = \int_0^\infty e^{-\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2}} J_0(\alpha r) r dr = \frac{\omega_{0e}^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2 \alpha^2}. \quad (2.18)$$

Reorganizando as equações, (2.16) e (2.17), obtemos

$$D \frac{\partial^2 T_s(\alpha, z, s)}{\partial z^2} = (s + \alpha^2 D) T_s(\alpha, z, s) - \frac{1}{s} Q_0 \left(\frac{\omega_{0e}^2}{4} e^{-\frac{1}{8} \omega_{0e}^2 \alpha^2} \right) e^{-A_e z}, \quad (2.19)$$

$$D_f \frac{\partial^2 T_f(\alpha, z, s)}{\partial z^2} = (s + \alpha^2 D_f) T_f(\alpha, z, s). \quad (2.20)$$

Resolvendo as equações diferenciais, (2.19) e (2.20), aplicando as condições de contorno (2.3)

$$\begin{aligned} T_s(r, \infty, t) &= T_f(r, -\infty, t) = 0, \\ k \frac{\partial T_s(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= k_f \frac{\partial T_f(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ T_s(r, 0, t) &= T_f(r, 0, t) \end{aligned}$$

e supondo a aproximação de baixa absorção óptica, $A_e \rightarrow 0$, podemos escrever a solução das equações de condução de calor no espaço de Laplace-z-Hankel como

$$T_s(\alpha, z, s) = -k_f \sqrt{D} Q(\alpha) F(s) \frac{\exp\left[-z\sqrt{(s+D\alpha^2)/D}\right]}{\sqrt{(s+D\alpha^2)}} + \frac{Q(\alpha)}{s(s+D\alpha^2)}, \quad (2.21)$$

$$T_f(\alpha, z, s) = k \sqrt{D_f} Q(\alpha) F(s) \frac{\exp\left[z\sqrt{(s+D_f\alpha^2)/D_f}\right]}{\sqrt{(s+D_f\alpha^2)}}, \quad (2.22)$$

com

$$F(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{k\sqrt{D_f}}{k^2 D_f - k_f^2 D} \frac{\sqrt{s+D_f\alpha^2}}{(s+\xi\alpha^2)} - \frac{k_f\sqrt{D}}{k^2 D_f - k_f^2 D} \frac{s+D_f\alpha^2}{\sqrt{s+D\alpha^2}(s+\xi\alpha^2)} \right], \quad (2.23)$$

$$\xi = \frac{(k^2 - k_f^2) D D_f}{k^2 D_f - k_f^2 D} \quad (2.24)$$

e

$$Q(\alpha) = Q_0 \left(\frac{\omega_{0e}^2}{4} e^{-\frac{1}{8} \omega_{0e}^2 \alpha^2} \right) \text{ com } Q_0 = \frac{2P_e A_e \phi}{\pi c \rho \omega_{0e}^2}. \quad (2.25)$$

O gradiente de temperatura é obtido fazendo as transformadas inversas de Laplace e Hankel. Para fazer a inversa da transformada de Laplace utilizamos o teorema da convolução.

O teorema da convolução afirma que se temos uma função no espaço de Laplace que pode ser escrita como a multiplicação de outras duas funções ($N(s) = L(s)M(s)$), a inversa dessa função é dada por [28, 29]

$$N(s) \rightarrow N(t) = \int_0^t L(\tau)M(t-\tau)d\tau. \quad (2.26)$$

Sendo $L(t)$ a inversa de $L(s)$ e $M(t)$ a inversa de $M(s)$.

Podemos reescrever a temperatura na amostra e no fluido no espaço de Hankel-Laplace como

$$T_s(\alpha, z, s) = -k_f \sqrt{D} Q(\alpha) F(s) H(s) + Q(\alpha) G(s), \quad (2.27)$$

$$T_f(\alpha, z, s) = k \sqrt{D_f} Q(\alpha) F(s) K(s). \quad (2.28)$$

Com $H(s), K(s), G(s)$ e $F(s)$ e suas inversas de Laplace $H(t), K(t), G(t)$ e $F(t)$ dados por

$$H(s) = \frac{\exp\left[-z\sqrt{(s+D\alpha^2)}/D\right]}{\sqrt{(s+D\alpha^2)}} \xrightarrow{\text{Inversa de Laplace}} H(t) = \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{4Dt} - D\alpha^2 t\right]}{\sqrt{\pi t}}; z \geq 0, \quad (2.29)$$

$$K(s) = \frac{\exp\left[z\sqrt{(s+D_f\alpha^2)}/D_f\right]}{\sqrt{(s+D_f\alpha^2)}} \xrightarrow{\text{Inversa de Laplace}} K(t) = \frac{\exp\left[-\frac{z^2}{4D_f t} - D_f\alpha^2 t\right]}{\sqrt{\pi t}}; z \leq 0, \quad (2.30)$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+D\alpha^2)} \xrightarrow{\text{Inversa de Laplace}} G(t) = \int_0^t e^{-D\alpha^2 \tau} d\tau, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s} \left[\frac{k\sqrt{D_f} \sqrt{s+D_f\alpha^2}}{k^2D_f - k_f^2D} - \frac{k_f\sqrt{D}}{k^2D_f - k_f^2D} \frac{s+D_f\alpha^2}{\sqrt{s+D\alpha^2}(s+\xi\alpha^2)} \right] \xrightarrow{\text{Inversa de Laplace}} \\
F(t) &= \frac{D_f}{(k^2D_f - k_f^2D)\alpha\xi} \left[k \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{D_f}t) - k_f \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{D}t) \right] \\
&+ \frac{(D_f - \xi)e^{-\xi\alpha^2 t}}{(k^2D_f - k_f^2D)\alpha\xi} \left[\frac{k_f\sqrt{D}}{\sqrt{D-\xi}} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{(D-\xi)t}) - \frac{k\sqrt{D_f}}{\sqrt{D_f-\xi}} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{(D_f-\xi)t}) \right],
\end{aligned} \tag{2.32}$$

em que $\operatorname{Erf}(x)$ é a função erro². Fazendo a transformada inversa de Laplace na equações (2.27) e (2.28), utilizando o teorema da convolução no primeiro termo do lado direito das equações, obtemos

$$T_s(\alpha, z, t) = -k_f\sqrt{D} Q(\alpha) \int_0^t F(\tau) H(t-\tau) d\tau + Q(\alpha)G(t), \tag{2.33}$$

ou

$$T_s(\alpha, z, t) = \int_0^t Q(\alpha) \left[e^{-D\alpha^2\tau} - \frac{k_f\sqrt{D}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{z^2}{4D(t-\tau)} - D\alpha^2(t-\tau)} \right] d\tau, \tag{2.34}$$

e

$$T_f(\alpha, z, t) = k\sqrt{D_f} Q(\alpha) \int_0^t F(\tau) K(t-\tau) d\tau, \tag{2.35}$$

ou

$$T_f(\alpha, z, t) = \int_0^t Q(\alpha) \left[\frac{k\sqrt{D_f}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{z^2}{4D_f(t-\tau)} - D_f\alpha^2(t-\tau)} \right] d\tau. \tag{2.36}$$

O gradiente de temperatura é obtido por meio da transformada inversa de Hankel,

$$T_s(r, z, t) = \int_0^\infty T_s(\alpha, z, t) J_0[\alpha r] \alpha d\alpha, \tag{2.37}$$

² A função erro é definida como $\operatorname{Erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

$$T_f(r, z, t) = \int_0^\infty T_f(\alpha, z, t) J_0[\alpha r] \alpha d\alpha. \quad (2.38)$$

Observamos que, para $k_f = 0$, é como se não houvesse fluido ao redor da amostra, a amostra estaria no vácuo. Neste caso, a equação (2.34) pode ser escrita como

$$T_{0s}(\alpha, t) = \int_0^t Q(\alpha) e^{-D\alpha^2\tau} d\tau = Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^t e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2\alpha^2} e^{-D\alpha^2\tau} d\tau, \quad (2.39)$$

lembrando que $Q(\alpha) = Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2\alpha^2}$.

Fazendo a transformada inversa de Hankel na equação (2.39) obtemos

$$T_{0s}(r, t) = Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^t \left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2\alpha^2} e^{-D\alpha^2\tau} J_0[\alpha r] \alpha d\alpha \right) d\tau,$$

ou

$$T_{0s}(r, t) = Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^t \left(\frac{4e^{-\frac{2r^2}{8D\tau + \omega_{0e}^2}}}{8D\tau + \omega_{0e}^2} \right) d\tau = \int_0^t \frac{Q_0}{\left(1 + 2\frac{\tau}{t_c}\right)} \exp\left(-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{1 + 2\frac{\tau}{t_c}}\right) d\tau, \quad (2.40)$$

com $t_c = \omega_{0e}^2/4D$. t_c é denominado tempo característico de formação de lente térmica [7]. Resolvendo a integral da equação (2.40) obtemos

$$T_{0s}(r, z, t) = \frac{Q_0 \omega_{0e}^2}{8D} \left[Ei\left(-\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2}\right) - \left[Ei\left(-\frac{2r^2}{8Dt + \omega_{0e}^2}\right) \right] \right], \quad (2.41)$$

em que $Ei(x)$ é a função exponencial integral³. A equação (2.41) é, como esperávamos, a solução da equação de difusão de calor (com fonte de calor gaussiana) sem considerar fluxo de calor entre amostra e fluido. A expressão (2.41) foi obtida no primeiro artigo de ELT publicado por Gordon e colaboradores em 1965 [6].

³ A função exponencial Integral é definida como $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Veremos adiante que para obter o perfil de deslocamento na superfície da amostra é necessário conhecer o perfil de temperatura no espaço de Hankel-Fourier-t. Obtemos tal quantidade aplicando a transformada de Fourier Cosseno na equação (2.34).

A transformada de Fourier Cosseno é definida como

$$f(\lambda) = F_C \{ f(z) \} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(z) \cos(\lambda z) dz, \quad (2.42)$$

temos

$$F_C \{ 1 \} = \sqrt{2\pi} \delta(\lambda),$$

$$F_C \left\{ e^{-\frac{z^2}{4D(t-\tau)}} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{D\pi(t-\tau)} e^{-D\lambda^2(t-\tau)}.$$

A temperatura no espaço de Hankel-Fourier-t é

$$T_s(\alpha, \lambda, t) = \int_0^t Q(\alpha) \left[\sqrt{2\pi} \delta(\lambda) e^{-D\alpha^2\tau} - k_f D F(\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-D(\alpha^2 + \lambda^2)(t-\tau)} \right] d\tau. \quad (2.43)$$

A fim de julgar a precisão da solução obtida comparamos o resultado com a solução obtida numericamente utilizando o MEF. O *software Comsol Multiphysics 3.5a* utiliza MEF para encontrar a solução numérica da equação de difusão de calor com as condições de contorno e iniciais impostas pela configuração experimental. O *software* resolve a equação de difusão de calor dada por

$$\rho c \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} - k \nabla^2 T(r, z, t) = \rho c Q(r, z, t) - \rho c \mathbf{v} \cdot \nabla T(r, z, t) \quad (2.44)$$

no qual \mathbf{v} é o fluxo de velocidade. Note que a equação acima difere das demais pelo segundo termo do lado direito da equação. Este termo leva em conta a convecção ou fluxo de massa devido à transferência de calor, o qual não é considerado em nossa solução.

O termo de fonte $\rho c Q(r, z, t)$ da equação (2.44) possui unidade de $\frac{W}{m^3}$ e pode ser escrito como $\rho c Q(r, z, t) = \frac{2P_e A_e \phi}{\pi \omega_{0e}^2} e^{-\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2}}$.

A modelagem consiste em desenhar a geometria do sistema e especificar as condições de contorno e fontes de calor. O problema é primeiramente resolvido com uma malha de elementos finitos com poucos elementos, e a malha é refinada até que o resultado obtido seja independente do tamanho dos elementos nela contido. A temperatura, $T(r, z, t)$, pode ser obtido para um determinado tempo, para uma série de tempos ou no estado estacionário.

O sistema é composto de um vidro de espessura L com fluido (ar ou água) ao redor. A amostra foi considerada cilíndrica com 10 milímetros de raio e 1 milímetro de espessura. A excitação óptica é feita ao longo do eixo z . Os valores das propriedades térmicas, ópticas e mecânicas utilizadas nas simulações são mostrados na Tabela 1. A integração numérica das equações (2.37) e (2.38) foram feitas utilizando comandos padrões do *software Mathematica* (versão 7.0).

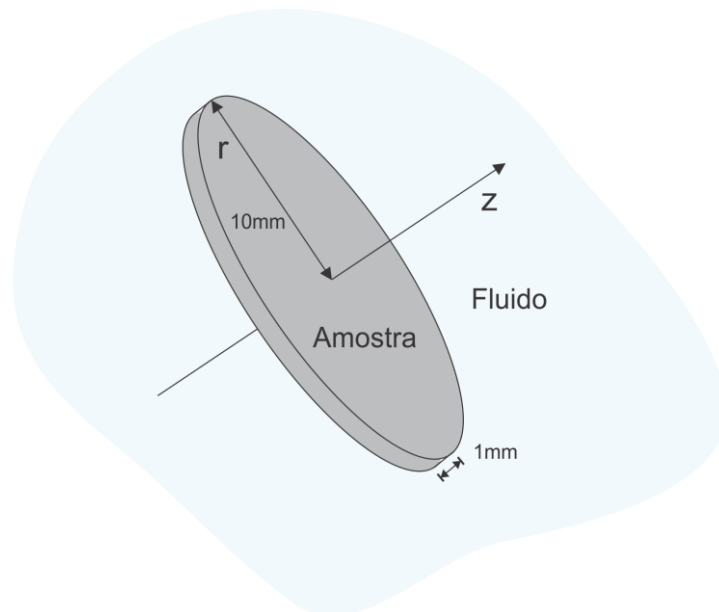


Figura 2.1 – Geometria da amostra utilizada nas simulações com MEF.

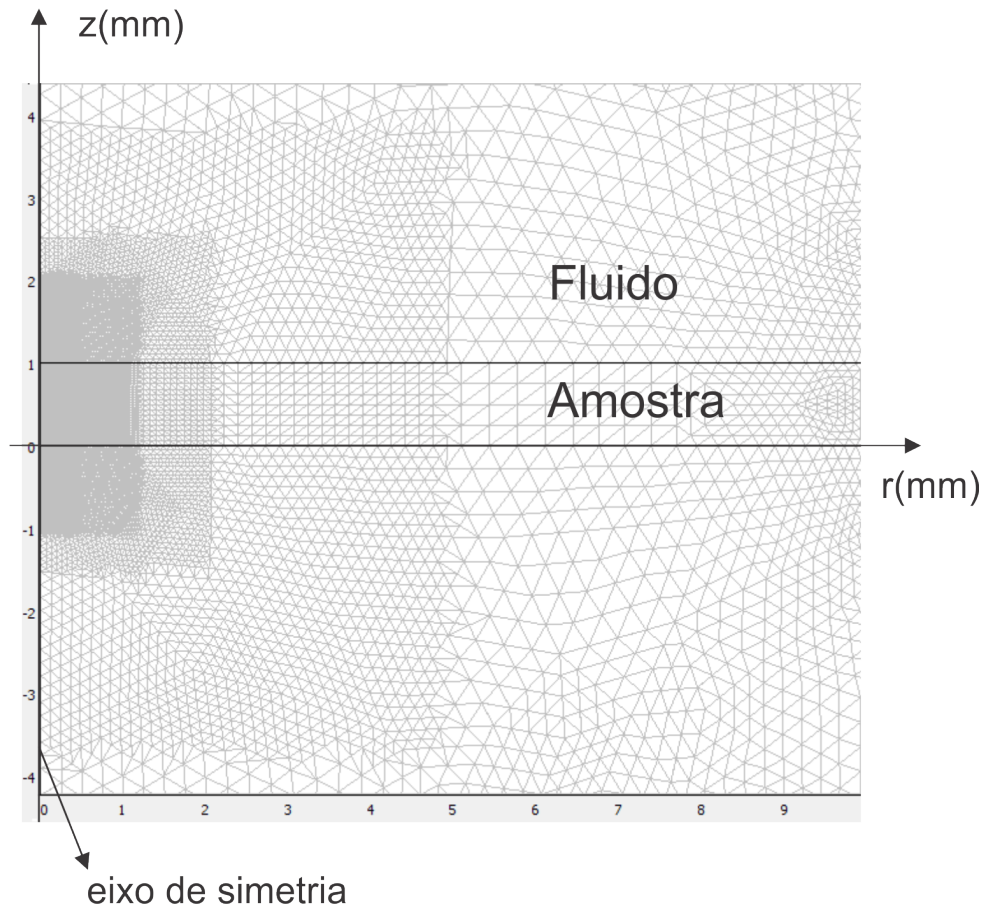


Figura 2. 2 – Representação da malha utilizada no *Comsol Multiphysics 3.5a*. A imagem mostra um corte radial no sistema descrito na Figura 2.1. Uma imagem tridimensional é obtida girando a figura em torno do eixo de simetria. O feixe laser atravessa o fluido e a amostra ao longo do eixo z.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados nas simulações. As propriedades térmicas, ópticas e mecânicas listadas são associadas a valores característicos encontrados em vidros aluminossilicato de cálcio com baixa concentração de sílica - LSCAS; listamos as propriedades do ar e da água para serem usadas como fluido; listamos também as propriedades do vidro Q-98, os parâmetros deste vidro serão utilizados apenas no capítulo 4 para encontrar a fase e a intensidade do sinal da técnica de LT.

Parâmetros	Unidades	Valores	Parâmetros	Unidades	Valores
k_{vidro}	(W/m K)	1,4	k_{Q-98}	(W/m K)	0,82
D_{vidro}	(10^{-7} m ² /s)	5	D_{Q-98}	(10^{-7} m ² /s)	3,3
ρ_{vidro}	(kg/m ³)	3000	ρ_{Q-98}	(kg/m ³)	3099
c_{vidro}	(J/kg K)	933	c_{Q-98}	(J/kg K)	800
$(\alpha_T)_{vidro}$	(10^{-6} K ⁻¹)	7,5	$(\alpha_T)_{Q-98}$	(10^{-6} K ⁻¹)	9,9
v_{vidro}		0,25	v_{Q-98}		0,24
k_{ar}	(W/m K)	0,026	$(ds/dT)_{Q-98}$	(10^{-6} K ⁻¹)	0,9
D_{ar}	(10^{-5} m ² /s)	2,19	$(ds/dT)_{vidro}$	(10^{-6} K ⁻¹)	10
ρ_{ar}	(kg/m ³)	1,18	$(dn/dT)_{ar}$	(10^{-6} K ⁻¹)	-1
c_{ar}	(J/kg K)	1005	$(dn/dT)_{água}$	(10^{-4} K ⁻¹)	-0,95
$k_{água}$	(W/m K)	0,605	Q_0	(K s ⁻¹)	1000
$D_{água}$	(10^{-7} m ² /s)	1,45	ω	(μ m)	50
$\rho_{água}$	(kg/m ³)	998	(m ; V)		(40 ; 3)
$c_{água}$	(J/kg K)	4182	λ_p	(nm)	632,8

A Figura 2.3 mostra o perfil de temperatura radial no centro da amostra, $z=0,5mm$, para uma amostra contornada por ar. A solução obtida pela equação (2.37) é comparada com o resultado utilizando MEF para vários tempos de excitação. Os resultados obtidos utilizando a solução analítica com acoplamento térmico entre ar e amostra estão consistentes com as soluções MEF.

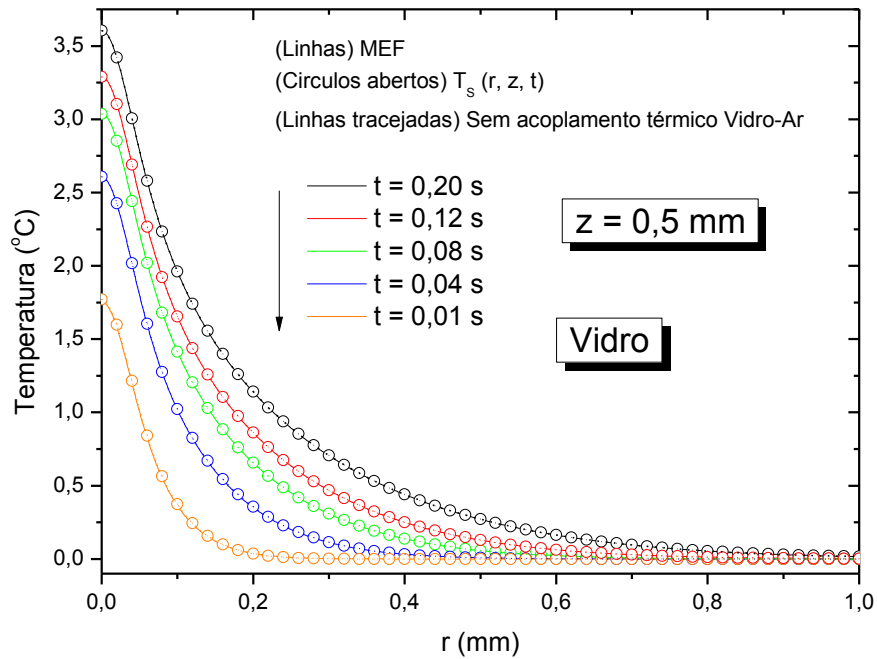


Figura 2.3 – Perfil de temperatura dentro da amostra em $z = 0,5$ mm utilizando MEF, a solução considerando fluxo de calor para o ar, equação (2.37), e a solução sem considerar fluxo de calor para o meio, equação (2.41).

A Figura 2.4 mostra o perfil de temperatura em diferentes tempos ao longo do eixo z ($r=0$). Os resultados obtidos por meio do MEF são consistentes com as soluções que consideram o fluxo de calor para o meio.

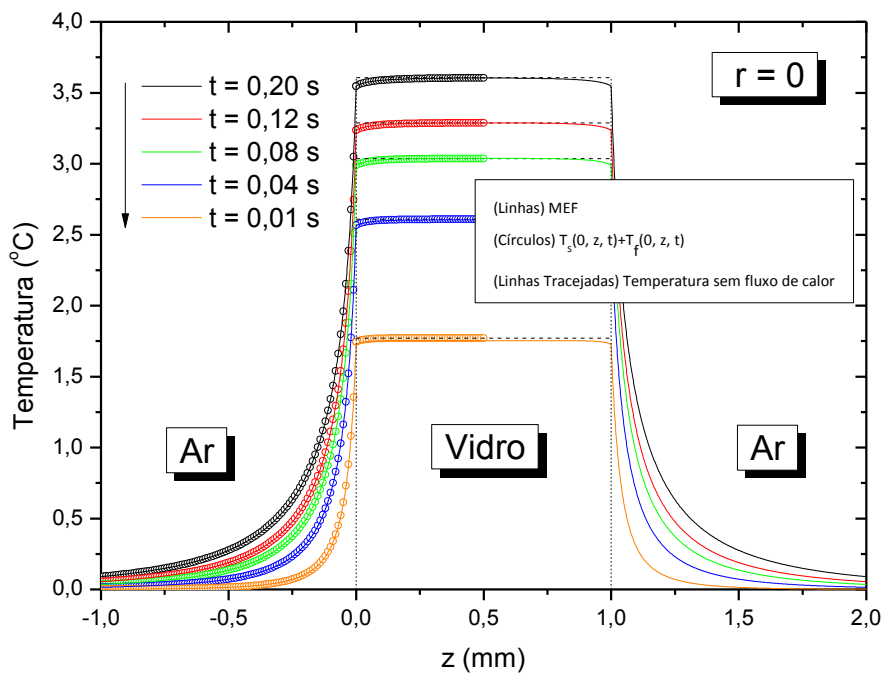


Figura 2.4 – Perfil de temperatura ao longo do eixo z (ar-vidro-ar) utilizando MEF, a solução considerando fluxo de calor para o ar, equações (2.37) e (2.38), e a solução sem considerar fluxo de calor para o meio, equação (2.41).

A Figura 2.5 mostra uma imagem ampliada da figura anterior, neste gráfico podemos observar que a temperatura considerando fluxo de calor diverge da solução sem perda de calor apenas próximo a interface vidro-ar. Para distâncias maiores que 0,2mm da interface amostra-fluido a temperatura obtida considerando fluxo de calor é igual à temperatura obtida sem considerar fluxo. Isto mostra que o fluxo de calor em uma interface não afeta a temperatura na outra interface se a amostra é relativamente grossa. Logo, nesta situação a aproximação de amostra semi-infinita é válida.

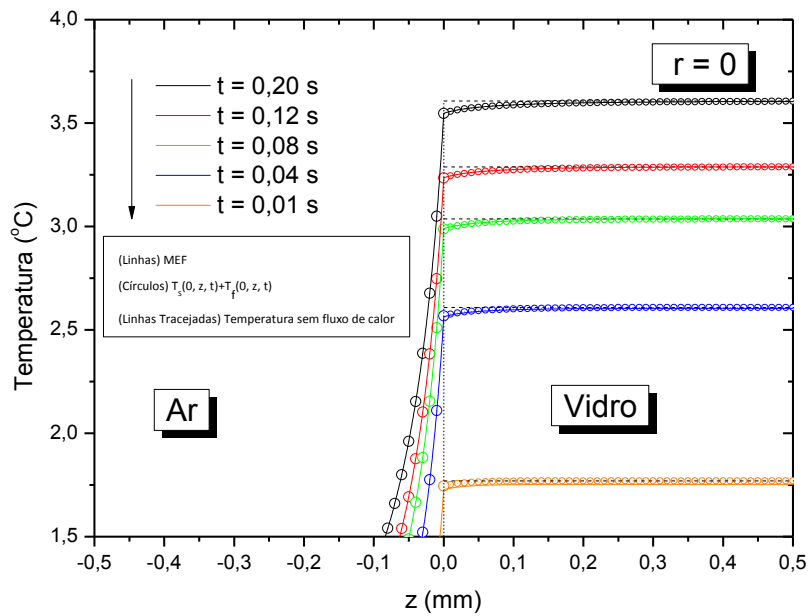


Figura 2.5 – Temperatura axial no ar e no vidro próximo a superfície da amostra.

O mesmo comportamento é observado para temperatura axial em diferentes posições radiais, como mostra a Figura 2.6.

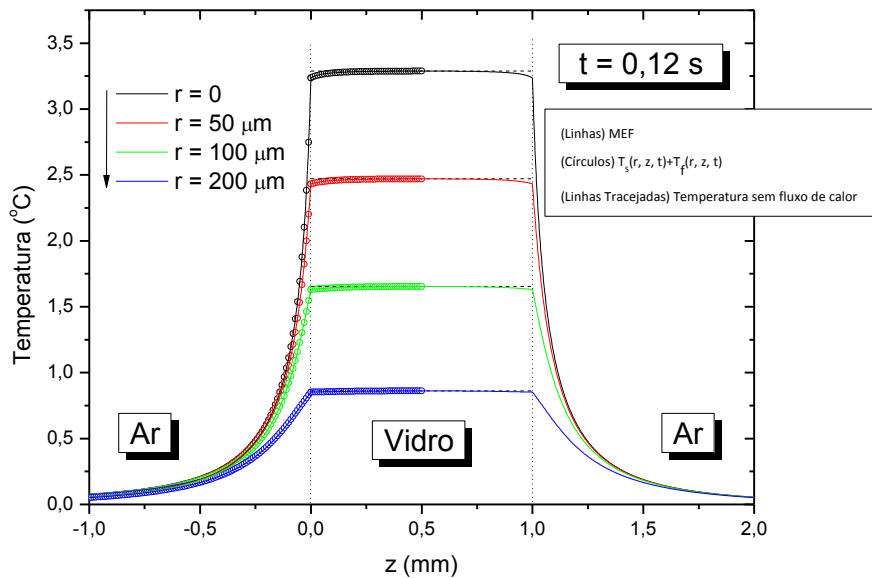


Figura 2.6 – Perfil de temperatura ao longo do eixo z (ar-vidro-ar) utilizando MEF, a solução considerando fluxo de calor para o ar (equações (2.37) e (2.38)) e a solução sem considerar fluxo de calor para o meio, equação (2.41), para diferentes posições radiais.

A Figura 2.7 mostra o perfil de temperatura radial no ar a uma distância z da superfície do vidro utilizando a simulação MEF e a solução analítica no fluido, equação (2.38), em $t = 0,12s$. Os dados obtidos por meio da solução analítica estão de acordo com os obtido por meio de MEF.

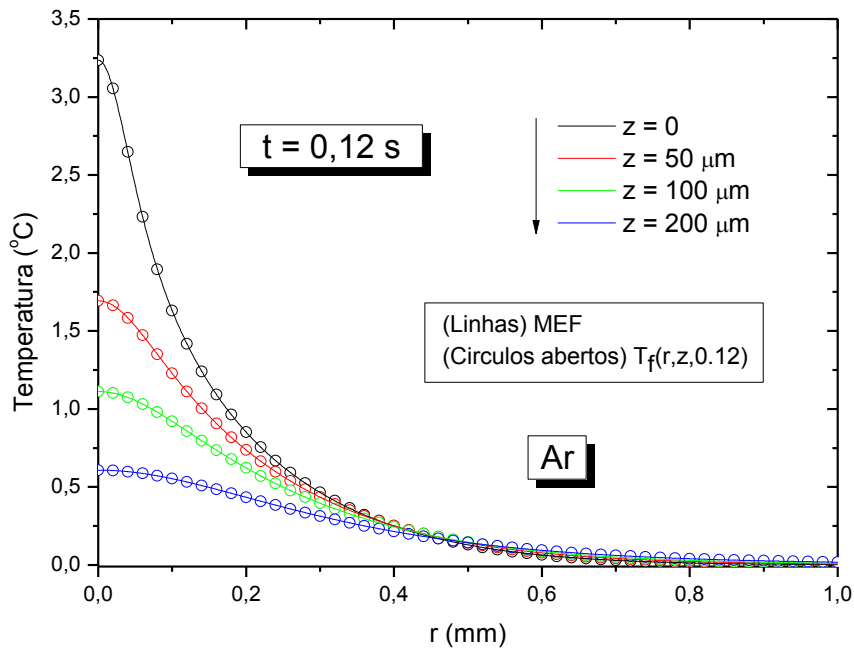


Figura 2.7 – Perfil de temperatura radial no ar para diferentes distâncias da superfície da amostra.

A Figura 2.8 mostra o gradiente de temperatura na amostra e no ar utilizando o *software Comsol Multiphysics 3.5a*. O eixo z é o eixo de simetria. A amostra está localizada em $0 < z < 1mm$ e o ar está em $z < 0$ e $z > 1mm$.

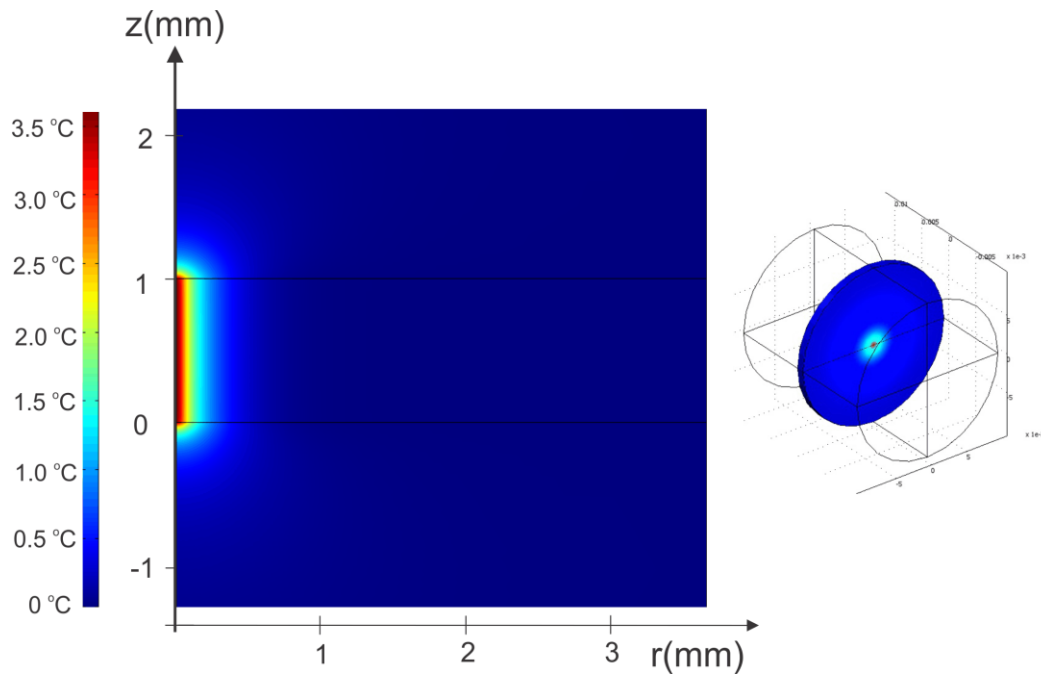


Figura 2.8 – Gradiente de temperatura na amostra e no ar utilizando MEF para um tempo de exposição ao laser de excitação igual a 200ms.

A Figura 2.9 mostra o gradiente de temperatura na amostra e no ar. A amostra está localizada em $0 < z < 0,5\text{mm}$ e o ar está em $-0,4\text{mm} < z < 0$.

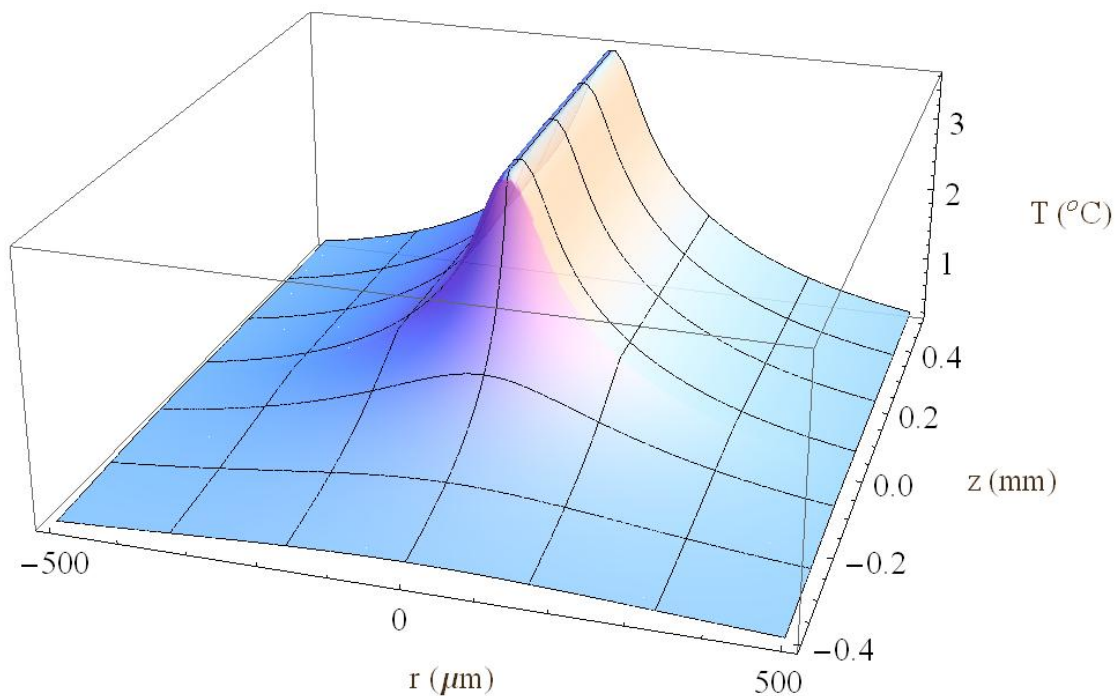


Figura 2.9 – Perfil de temperatura na amostra e no ar em $t=200\text{ms}$. Estes resultados foram encontrados utilizando as equações (2.37) e (2.38).

As figuras a seguir mostram o gradiente de temperatura com a água como fluido que circunda a amostra. A Figura 2.10 mostra o perfil de temperatura em diferentes tempos ao longo do eixo z ($r=0$). Os resultados obtidos por meio do MEF são consistentes com as soluções das equações (2.37) e (2.38). Observa-se um pequeno desvio entre a temperatura obtida por MEF e pelo modelo semi-analítico no centro da amostra, próximo a $z=0,5\text{mm}$. Isto ocorre pois a amostra de 1mm não é grossa o suficiente para ser considerada semi-infinita quando colocada na água. Para esta espessura da amostra, uma das interfaces amostra-água interfere fracamente na outra superfície devido à espessura da amostra ser pequena. Porém, observamos que a diferença de temperatura não é muito significativa. Próximo a interface da amostra, $z \leq 0,25\text{mm}$, o modelo concorda com os resultados obtidos por MEF. Neste caso, se considerarmos amostras um pouco mais espessas, essa diferença desaparece e a aproximação semi-infinita pode ser considerada.

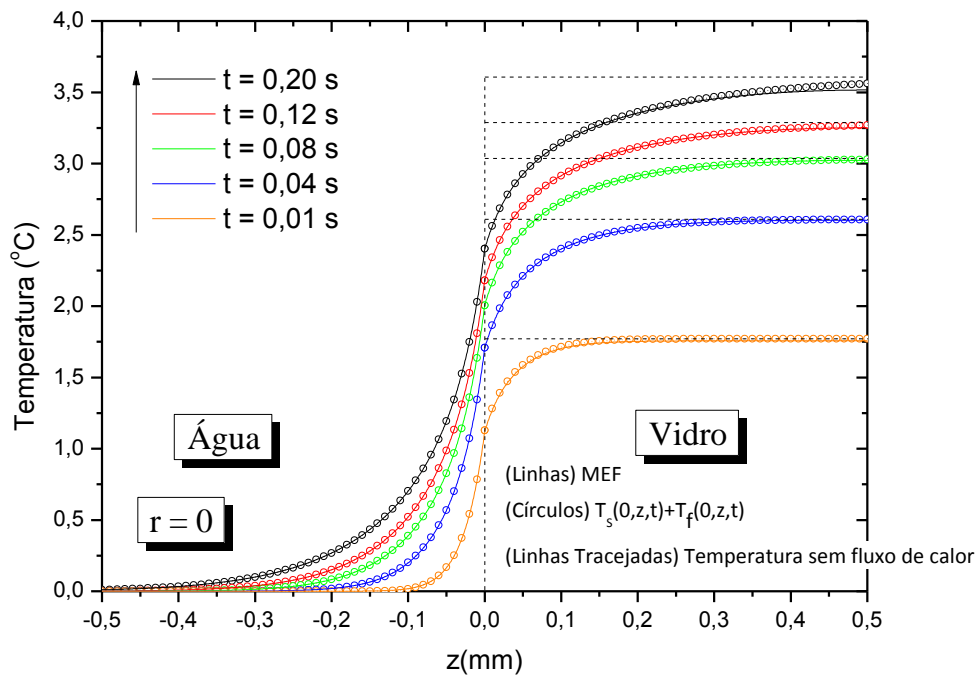


Figura 2.10 - Perfil de temperatura ao longo do eixo z (água-vidro) utilizando MEF, a solução considerando fluxo de calor (equações (2.37) e (2.38)) e a solução sem considerar fluxo de calor para o meio, equação (2.41).

A Figura 2.11 mostra a temperatura axial em diferentes posições radiais, para um tempo de exposição do laser de excitação na amostra igual a 120 ms. Observa-se que os dados da solução semi-analítica estão de acordo com os resultados obtidos por MEF.

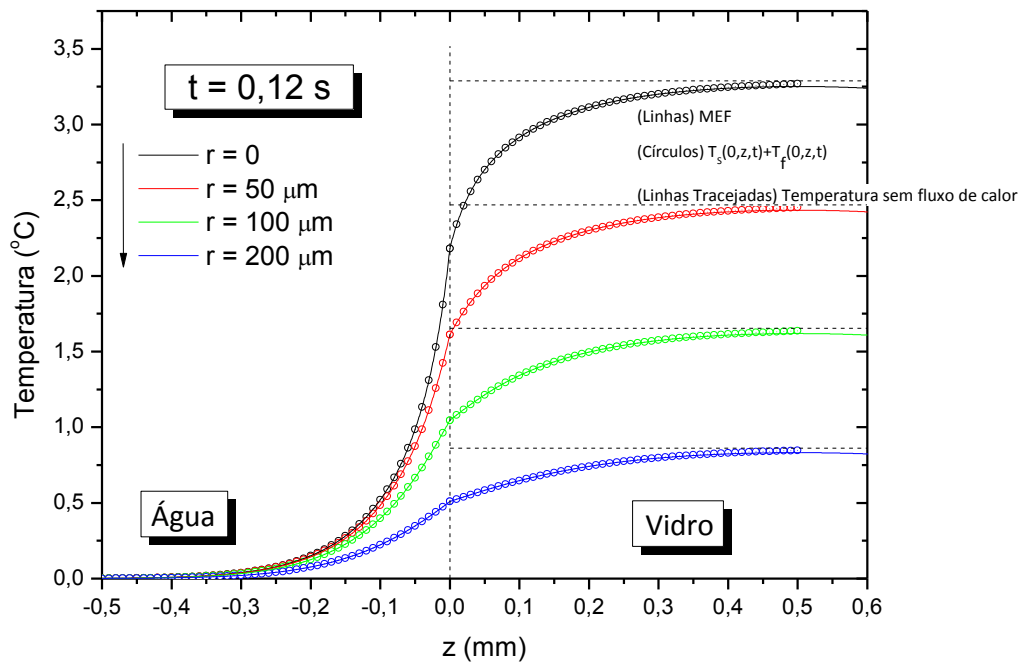


Figura 2. 11 - Perfil de temperatura ao longo do eixo z (água-vidro) utilizando MEF, a solução considerando fluxo de calor para o ar (equações (2.37) e (2.38)) e a solução sem considerar fluxo de calor para o meio (equação (2.41)) para diferentes posições radiais.

A Figura 2.12 mostra o perfil de temperatura radial na água a uma distância z da superfície do vidro utilizando a simulação MEF e a solução analítica no fluido, equação (2.38), em $t = 0,12s$. Os dados obtidos por meio da solução analítica estão de acordo com os resultados obtido por meio de MEF.

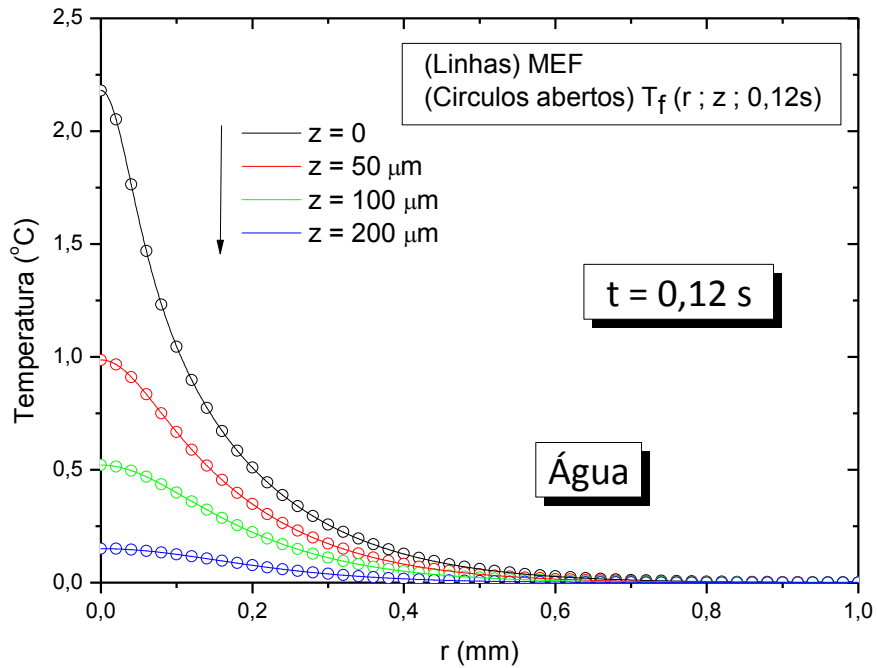


Figura 2.12 - Perfil de temperatura radial na água para diferentes distâncias da superfície da amostra.

A Figura 2.13 mostra o gradiente de temperatura na amostra e na água utilizando MEF. O eixo z é o eixo de simetria. A amostra está localizada em $0 < z < 1mm$ e a água está em $z < 0$ e $z > 1mm$. A Figura 2.14 mostra o gradiente de temperatura na amostra e na água, com a amostra localizada em $0 < z < 0,5mm$ e a água em $-0,4mm < z < 0$, este gráfico foi obtido com comandos padrões do software Mathematica por meio das equações (2.37) e (2.38).

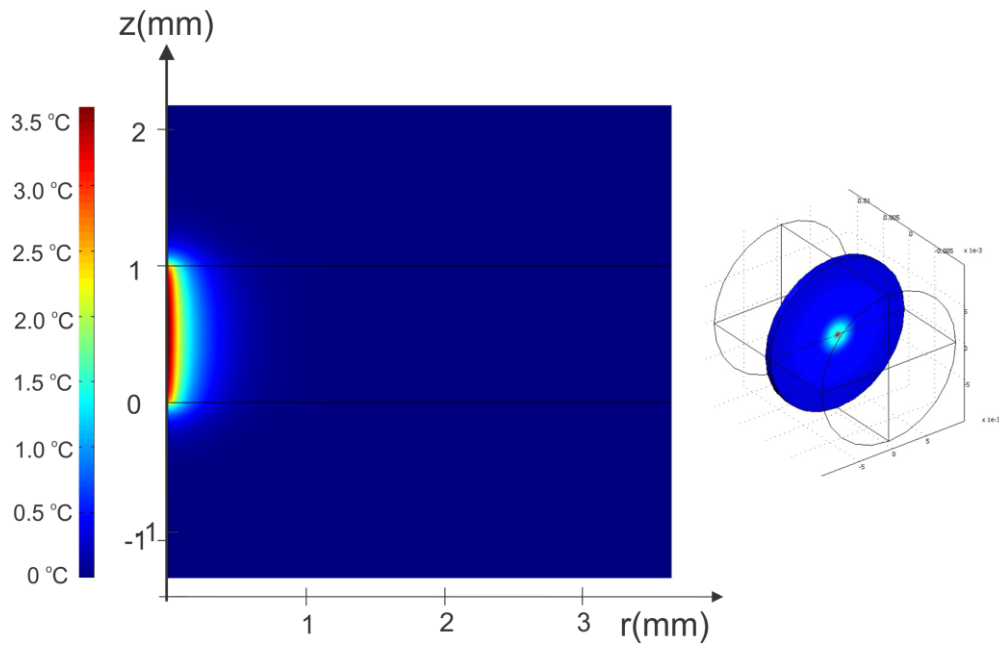


Figura 2.13 – Gradiente de temperatura na amostra e na água utilizando MEF para um tempo de exposição ao laser de excitação igual a 200 milisegundos.

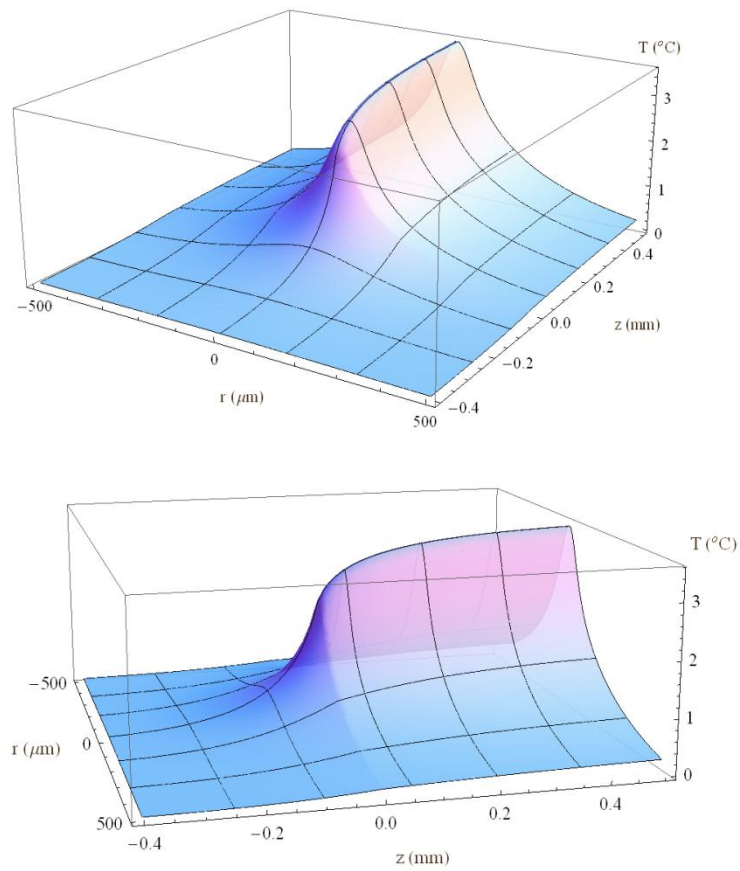


Figura 2. 14 – Perfil de temperatura na amostra e na água em t igual a 200 milisegundos, solução encontrada utilizando as equações (2.37) e (2.38).

Para visualizarmos a diferença de temperatura para diferentes fluidos adjacentes, na Figura 2.15 mostramos o perfil de temperatura no vidro e em diferentes fluidos para um tempo de excitação igual a 120 milisegundos. As linhas são os dados de temperatura obtido por meio de MEF e os círculos por meio das equações (2.37) e (2.38).

Concluimos que as expressões encontradas para a temperatura considerando acoplamento térmico entre amostra e fluido são consistentes com os resultados obtidos numericamente utilizando o método dos elementos finitos. Porém, a amostra não deve ser tão fina a ponto do fluxo de calor da amostra para o fluido em uma interface interferir na temperatura na outra superfície da amostra. No caso do acoplamento térmico entre vidro e ar, o modelo previsto neste capítulo descreve a temperatura para amostras com espessura maior do que $0,5\text{mm}$. No caso de acoplamento térmico entre vidro e água, a espessura da amostra deve ser maior do que 1mm . Quanto maior a espessura da amostra, melhor o modelo teórico descreverá a temperatura do sistema.

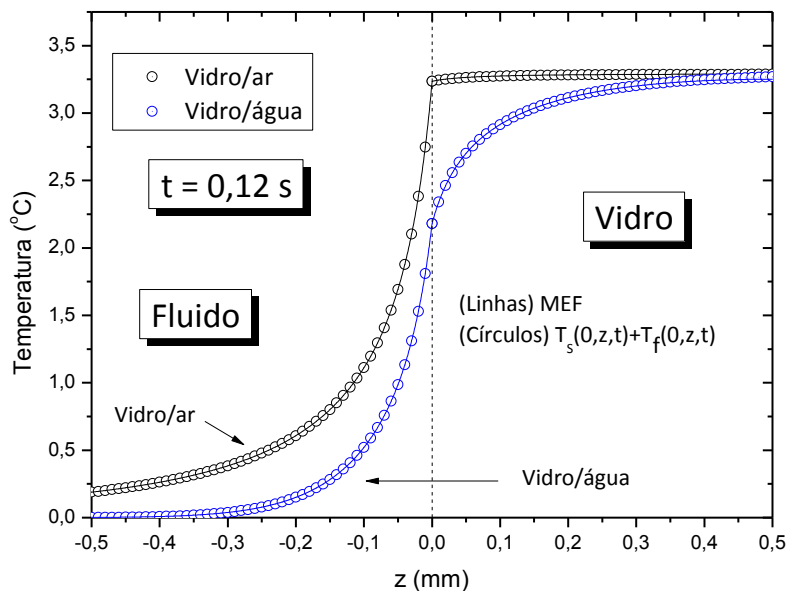


Figura 2. 15 – Perfil de temperatura axial no vidro e no fluido. A linha representa o resultado obtido utilizando MEF e os círculos a solução considerando fluxo de calor entre amostra e fluido, equações (2.37) e (2.38), com 120ms de exposição ao laser de excitação.

Capítulo 3

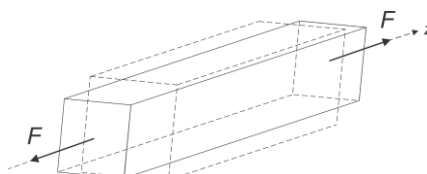
Perfil de deslocamento

A teoria da elasticidade pode ser utilizada para obter o deslocamento superficial na amostra devido a uma distribuição de temperatura não uniforme induzida pelo laser de excitação. Na aproximação quase estática, consideramos que a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é pequena, de tal forma que o termo de inércia da equação termoelástica pode ser desprezado, ou seja, a resposta elástica é muito mais rápida que a térmica; então a equação termoelástica pode ser escrita como [22, 23]

$$(1-2\nu)\nabla^2\mathbf{u}(r,z,t)+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}(r,z,t))=2(1+\nu)\alpha_T\nabla T(r,z,t) \quad (3.1)$$

Sendo $\mathbf{u}(r,z,t)$ o vetor deslocamento, α_T é o coeficiente de expansão térmico linear, ν é a razão de Poisson⁴. A Figura 3.1 mostra uma representação do vetor \mathbf{u} .

⁴ Um material isotrópico ao receber uma tensão em uma determinada direção, suponhamos que na direção z , sofre uma deformação ε_z tanto na direção z como nas direções transversais x e y . A razão de Poisson é definida como $\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$, em que ε_z , ε_x e ε_y é a deformação na direção z , x e y respectivamente. Em geral, ν possui sinal positivo, pois uma expansão na direção z gera compressão nas direções transversais.



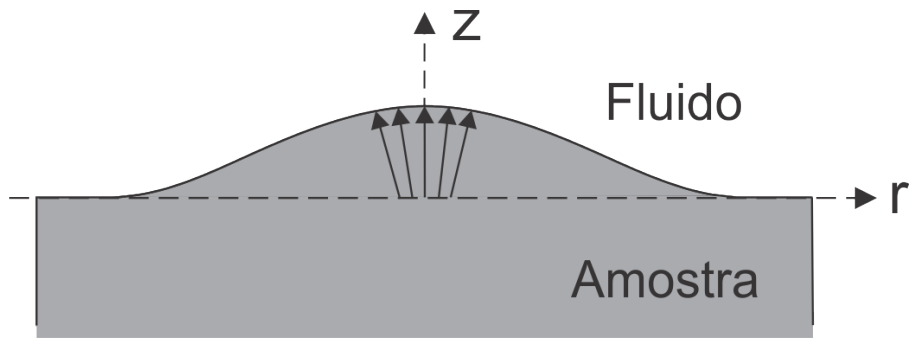


Figura 3.1 – Vetores de deslocamento. A linha tracejada representa a superfície da amostra antes da deformação. As setas indicam o deslocamento de um ponto da superfície após a amostra ser aquecida localmente pelo feixe de excitação.

Supondo que a amostra esteja livre de tensão em sua superfície ($z=0$), as condições de contorno são

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0 \text{ e } \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad (3.2)$$

σ_{rz} e σ_{zz} são as componentes de tensão perpendiculares a superfície da amostra. A Figura 3.2 mostra um esquema dos componentes da tensão.

Os demais componentes de tensão não são nulos. Como exemplo, considere a componente $\sigma_{zr}|_{z=0}$, esta componente de tensão está localizada na superfície da amostra em uma posição radial qualquer apontando na direção r , onde também há amostra, esse ponto não está livre para se movimentar nessa direção.

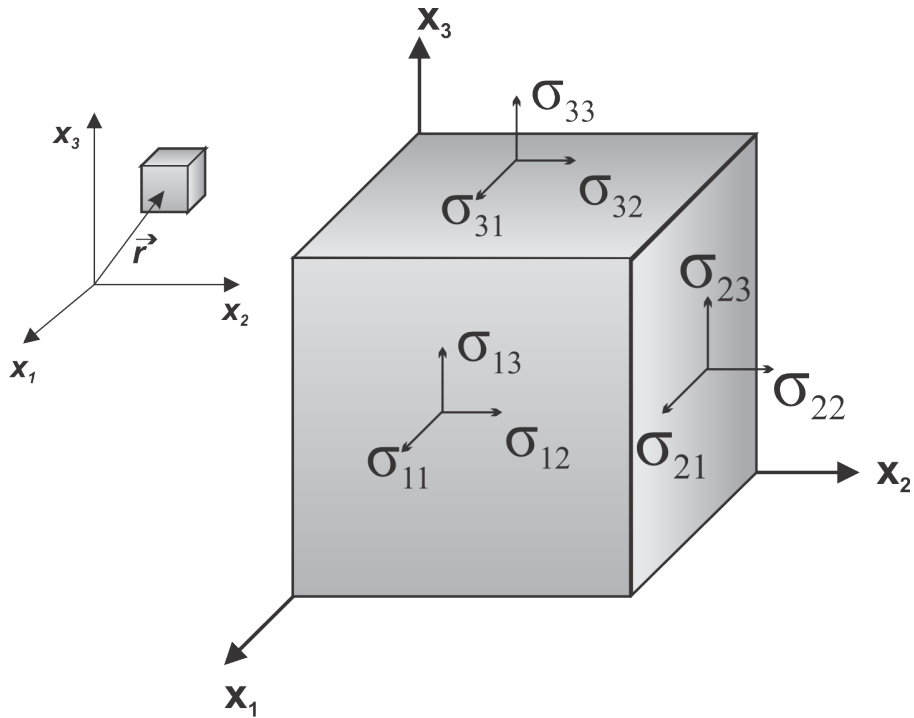


Figura 3.2 – σ_{ij} é uma componente da tensão, o índice i indica qual a normal de um plano e o índice j indica a direção da componente a partir deste plano⁵.

A solução da equação (3.1) pode ser expressa em coordenadas cilíndricas⁶ introduzindo o potencial de deslocamento escalar Ψ e a função de Love ψ , sendo Ψ a solução da equação de Poisson

$$\nabla^2\Psi(r, z, t) = \chi T(r, z, t) \quad (3.3)$$

e ψ , função de Love, é a solução da equação biarmônica

$$\nabla^2\nabla^2\psi(r, z, t) = 0. \quad (3.4)$$

em que

⁵ A tensão (σ_{ij}) é definida como a razão entre a força (F_j) aplicada sobre um corpo ao longo do eixo j e a área (a_i) da seção transversal perpendicular ao eixo i do corpo, $\sigma_{ij} = F_j/a_i$. Por exemplo, a tensão σ_{rz} é a força na direção z aplicada em uma superfície perpendicular ao eixo r . Quando se toma o elemento infinitesimal do volume tendendo a zero, as componentes de tensão são definidas pontualmente.

⁶ É conveniente escrevermos o laplaciano em coordenadas cilíndricas devido à geometria do feixe de excitação.

$$\chi = \alpha_T \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}. \quad (3.5)$$

Utilizando as soluções das equações (3.3) e (3.4), as relações de tensão são obtidas por meio das seguintes expressões [23]

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{E}{1+\nu} [\partial_{zz} \Psi - \nabla^2 \Psi], \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \frac{E}{1+\nu} \partial_{rz} \Psi, \quad (3.7)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_z [(2-\nu) \nabla^2 \psi - \partial_{zz} \psi], \quad (3.8)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_r [(1-\nu) \nabla^2 \psi - \partial_{zz} \psi]. \quad (3.9)$$

As relações de (3.6) a (3.9) satisfazem as seguintes condições de contorno na superfície da amostra:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} + \bar{\bar{\sigma}}_{zz}|_{z=0} = 0, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = \bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} + \bar{\bar{\sigma}}_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (3.11)$$

sendo E o módulo de Young⁷. A deformação superficial é dado por

$$\mathbf{u}(r, z, t) = \bar{\mathbf{u}}(r, z, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(r, z, t), \quad (3.12)$$

com

$$\bar{u}_z(r, z, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (3.13)$$

$$\bar{u}_r(r, z, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (3.14)$$

⁷ O módulo de Young (E) é uma grandeza que mede a rigidez do material, ou seja, é a propriedade mecânica que relaciona a tensão aplicada em um material com a deformação gerada [30].

$$\bar{\bar{u}}_z(r, z, t) = \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi, \quad (3.15)$$

$$\bar{\bar{u}}_r(r, z, t) = \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]. \quad (3.16)$$

Para resolver a equação termoelástica e obtermos a componente z do vetor deslocamento, $u_z(r, 0, t)$, dividimos o problema inicial, equação (3.1), em dois problemas mais simples, equações (3.3) e (3.4). As grandezas $\bar{\sigma}_{zz}$, $\bar{\sigma}_{rz}$, \bar{u}_z e $\bar{\bar{u}}_z$ dependem da solução da equação de Poisson (Ψ). As grandezas $\bar{\bar{\sigma}}_{zz}$, $\bar{\bar{\sigma}}_{rz}$, $\bar{\bar{u}}_z$ e $\bar{\bar{u}}_r$ dependem da solução da equação biharmônica (ψ). Ou seja, resolvendo as equações (3.3) e (3.4) com as condições de contorno (3.10) e (3.11), encontramos a deformação superficial na amostra utilizando as equações (3.12) a (3.16).

3.1 Equação de Poisson

Obtemos a solução da equação de Poisson aplicando as transformadas de Hankel e Fourier em cossenos na equação (3.3). O potencial escalar de deslocamento é escrito como

$$\Psi(r, z, t) = -\chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \cos(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda. \quad (3.17)$$

Podemos verificar a solução $\Psi(r, z, t)$ aplicando o laplaciano em coordenadas cilíndricas na equação (3.17),

$$\nabla^2 \Psi(r, z, t) = -\chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \nabla^2 [\cos(\lambda z) J_0(\alpha r)] \alpha d\alpha d\lambda, \quad (3.18)$$

obtendo

$$\nabla^2 \Psi(r, z, t) = -\chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} [-(\alpha^2 + \lambda^2) J_0(\alpha r) \cos(\lambda z)] \alpha d\alpha d\lambda,$$

$$\nabla^2 \Psi(r, z, t) = \chi \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty T(\alpha, \lambda, t) J_0(\alpha r) \cos(\lambda z) \alpha d\alpha d\lambda \right], \quad (3.19)$$

$$\nabla^2 \Psi(r, z, t) = \chi T(r, z, t). \quad (3.20)$$

Observe que o termo dentro dos colchetes na equação (3.19) é a temperatura $T(r, z, t)$ escrita no espaço de Hankel-Fourier por meio de suas transformadas inversas. Logo, a solução (3.17) satisfaz a equação de Poisson.

Utilizando a solução $\Psi(r, z, t)$ podemos encontrar as grandezas $\bar{u}_z(r, z, t)$, $\bar{u}_r(r, z, t)$, $\bar{\sigma}_{zz}$ e $\bar{\sigma}_{rz}$. Derivando a equação (3.17) em relação à variável z obtemos

$$\bar{u}_z(r, z, t) = \chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \text{sen}(\lambda z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha d\lambda. \quad (3.21)$$

Vimos na seção 1.3 que na técnica de ET o que causa a mudança de fase no laser de prova é o deslocamento na superfície da amostra ($z=0$). Por essa razão, estamos interessados em $u_z(r, z=0, t)$. O integrando da equação (3.21) possui o termo $\text{sen}(\lambda z)$, de maneira que em $z=0$ a expressão se torna zero,

$$\bar{u}_z(r, z=0, t) = 0. \quad (3.22)$$

Aplicando $\Psi(r, z, t)$ nas equações (3.6) e (3.7), em seguida tomando $z=0$ obtemos:

$$\bar{\sigma}_{zz} \Big|_{z=0} = -\chi \left(\frac{E}{1+\nu} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \alpha^3 J_0(\alpha r) d\alpha d\lambda, \quad (3.23)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (3.24)$$

Esses resultados são necessários para aplicarmos as condições de contorno do sistema.

3.2 Equação Biharmônica

A solução geral da equação biharmônica é a função de Love, dada por

$$\psi(r, z, t) = \int_0^{\infty} (C + \alpha z G) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (3.25)$$

no qual C e G são constantes definidas pelas condições de contorno da tensão, descritos nas relações (3.10) e (3.11). Utilizando a relação (3.10) com $\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0}$ dado pela relação (3.23) e a relação (3.11) com $\bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0$ como vimos em (3.24) obtemos

$$\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0} = \chi \left(\frac{E}{1+\nu} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} \alpha^3 J_0(\alpha r) d\alpha d\lambda, \quad (3.26)$$

e

$$\bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (3.27)$$

Utilizando as relações (3.8), (3.9) e a função de Love dado pela equação (3.25) obtemos

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{\infty} (C + G + \alpha Gz - 2G\nu) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha, \quad (3.28)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{\infty} (C + \alpha Gz - 2G\nu) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) \alpha^3 d\alpha. \quad (3.29)$$

Aplicando a condição (3.27) em (3.29) temos

$$\bar{\sigma}_{rz}|_{z=0} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{\infty} (C - 2G\nu) e^{-\alpha z} J_1(\alpha r) \alpha^3 d\alpha = 0, \quad (3.30)$$

de onde concluímos que $C = 2G\nu$. Substituindo C na equação (3.28) temos

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{\infty} G(1 + \alpha z) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha. \quad (3.31)$$

Na superfície da amostra, $z = 0$, a equação acima se torna

$$\bar{\sigma}_{zz}\Big|_{z=0} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{\infty} GJ_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha. \quad (3.32)$$

Comparando a relação acima com a relação (3.26) temos

$$\frac{1}{(1-2\nu)} \int_0^{\infty} GJ_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha = \chi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} J_0(\alpha r) \alpha^3 d\alpha d\lambda. \quad (3.33)$$

A equação acima é satisfeita para

$$G = (1-2\nu) \chi f(\alpha, t), \quad (3.34)$$

com

$$f(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{T(\alpha, \lambda, t)}{\alpha^2 + \lambda^2} d\lambda. \quad (3.35)$$

Assim podemos reescrever $C = 2G\nu$ em função de $f(\alpha, t)$

$$C = 2\nu\chi(1-2\nu) f(\alpha, t). \quad (3.36)$$

Substituindo as constantes C e G na função de Love (3.25) obtemos

$$\psi(r, z, t) = \chi \int_0^{\infty} (1-2\nu)(\alpha z + 2\nu) f(\alpha, t) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (3.37)$$

Utilizando a função de Love podemos encontrar a componente \bar{u}_z substituindo a equação (3.37) na relação (3.15), temos que

$$\bar{u}_z(r, z, t) = -\chi \int_0^{\infty} \alpha^2 (\alpha z - 2\nu + 2) f(\alpha, t) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (3.38)$$

Na superfície da amostra o deslocamento $u_z(r, 0, t) = \bar{u}_z(r, 0, t) + \bar{\bar{u}}_z(r, 0, t)$ será $u_z(r, 0, t) = \bar{\bar{u}}_z(r, 0, t)$, pois $\bar{u}_z(r, 0, t) = 0$, devido equação (3.22). Fazendo $z = 0$ na equação (3.38), obtemos

$$u_z(r, z, t)\Big|_{z=0} = -2\chi(1-\nu) \int_0^{\infty} \alpha^2 f(\alpha, t) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (3.39)$$

Substituindo χ pela expressão (3.5) obtemos

$$u_z(r,0,t) = -2(1+\nu)\alpha_T \int_0^\infty \alpha^2 f(\alpha,t) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (3.40)$$

com $f(\alpha,t)$ descrito pela equação (3.35)

$$f(\alpha,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_s(\alpha,\lambda,t) (\alpha^2 + \lambda^2)^{-1} d\lambda.$$

Para calcular o deslocamento superficial $u_z(r,z,t)$ precisamos da temperatura na amostra no espaço de Hankel-Fourier-t. Para o caso de baixa absorção óptica o resultado obtido é descrito pela equação (2.43),

$$T_s(\alpha,\lambda,t) = \int_0^t Q(\alpha) \left[\sqrt{2\pi} \delta(\lambda) e^{-D\alpha^2\tau} - k_f D F(\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-D(\alpha^2+\lambda^2)(t-\tau)} \right] d\tau,$$

em que $F(\tau)$ é dado pela expressão (2.32). Logo,

$$f(\alpha,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty Q(\alpha) \left[\sqrt{2\pi} \delta(\lambda) e^{-D\alpha^2\tau} - k_f D F(\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-D(\alpha^2+\lambda^2)(t-\tau)} \right] (\alpha^2 + \lambda^2)^{-1} d\lambda d\tau. \quad (3.41)$$

O primeiro termo da equação (3.41) pode ser reescrito como

$$f_1(\alpha,t) = Q(\alpha) \int_0^t \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{2\pi} \delta(\lambda) e^{-D\alpha^2\tau} (\alpha^2 + \lambda^2)^{-1} d\lambda \right] d\tau = Q(\alpha) \int_0^t \frac{e^{-D\alpha^2\tau}}{\alpha^2} d\tau, \quad (3.42)$$

e o segundo termo como

$$f_2(\alpha,t) = -k_f D Q(\alpha) \frac{2}{\pi} \int_0^t F(\tau) \left(\int_0^\infty \left[e^{-D(\alpha^2+\lambda^2)(t-\tau)} \right] (\alpha^2 + \lambda^2)^{-1} d\lambda \right) d\tau,$$

$$f_2(\alpha,t) = -k_f D Q(\alpha) \int_0^t \frac{F(\tau)}{\alpha} \operatorname{Erfc} \left[\alpha \sqrt{D(t-\tau)} \right] d\tau, \quad (3.43)$$

em que $Erfc[x]$ é a função erro complementar⁸. Substituindo (3.43) e (3.42) em (3.41) temos

$$f(\alpha, t) = Q(\alpha) \int_0^t \frac{e^{-D\alpha^2\tau}}{\alpha^2} d\tau - k_f D Q(\alpha) \int_0^t \frac{F(\tau)}{\alpha} Erfc\left[\alpha\sqrt{D(t-\tau)}\right] d\tau. \quad (3.44)$$

com

$$F(\tau) = -\frac{k_f Erf\left[\sqrt{D}\sqrt{\tau}\alpha\right] - k Erf\left[\sqrt{D_f}\sqrt{\tau}\alpha\right]}{\alpha D(k^2 - k_f^2)} + \frac{k^2 \sqrt{D - D_f}}{\alpha D(-k^2 + k_f^2) \sqrt{Dk_f^2 - D_f k^2}} e^{-\frac{(k^2 - k_f^2) D_f D}{(k^2 D_f - k_f^2 D)} \alpha^2 \tau} \left(Erf\left[\frac{\sqrt{D_f}\sqrt{D - D_f} k \sqrt{\tau} \alpha}{\sqrt{Dk_f^2 - D_f k^2}}\right] - Erf\left[\frac{\sqrt{D}\sqrt{D - D_f} k_f \sqrt{\tau} \alpha}{\sqrt{Dk_f^2 - D_f k^2}}\right] \right) \quad (3.45)$$

A expressão $F(\tau)$ da equação (3.45) foi obtida substituindo o parâmetro ξ , dado pela equação (2.24), na expressão (2.32). Logo, podemos escrever a componente vertical do deslocamento na superfície da amostra $u_z(r, 0, t)$ substituindo a equação (3.44) em (3.40) e escrevendo $Q(\alpha)$ como na equação (2.25), obtemos

$$u_z(r, 0, t) = -2(1+\nu)\alpha_T Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2 \alpha^2} \left(\int_0^t e^{-D\alpha^2\tau} d\tau \right) J_0(\alpha r) d\alpha + 2(1+\nu)\alpha_T Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} k_f D \int_0^\infty \alpha e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2 \alpha^2} \int_0^t F(\tau) Erfc\left[\alpha\sqrt{D(t-\tau)}\right] d\tau J_0(\alpha r) d\alpha \quad (3.46)$$

O primeiro termo da equação (3.46), chamaremos de $u_z^{(0)}(r, 0, t)$, pode ser integrado em α e τ . Integrando primeiramente em α obtemos

$$u_z^{(0)}(r, 0, t) = -2(1+\nu)\alpha_T Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^t \left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2 \alpha^2} e^{-D\alpha^2\tau} J_0(\alpha r) d\alpha \right) d\tau, \quad (3.47)$$

$$u_z^{(0)}(r, 0, t) = -2(1+\nu)\alpha_T Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{8D\tau + \omega_{0e}^2}} \sqrt{2\pi} I_0\left(\frac{r^2}{8D\tau + \omega_{0e}^2}\right)}{\sqrt{8D\tau + \omega_{0e}^2}} d\tau.$$

⁸ A função erro complementar é definido como $Erfc[x] = 1 - Erf[x]$, sendo $Erf[x]$ a função erro dada por $Erf[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Integrando a equação acima em τ obtemos

$$u_z^{(0)}(r,0,t) = -2(1+\nu)\alpha_T Q_0 \frac{\omega_{0e}^2}{4} \sqrt{2\pi} \left(\frac{-e^{-\frac{r^2}{\omega_{0e}^2}} \omega_{0e} (2r^2 + \omega^2) I_0 \left[\frac{r^2}{\omega_{0e}^2} \right] + 2r^2 I_1 \left[\frac{r^2}{\omega_{0e}^2} \right]}{4D\omega_{0e}^2} + \frac{e^{-\frac{r^2}{8Dt + \omega_{0e}^2}} (2r^2 + 8Dt + \omega^2) I_0 \left[\frac{r^2}{8Dt + \omega_{0e}^2} \right] + 2r^2 I_1 \left[\frac{r^2}{8Dt + \omega_{0e}^2} \right]}{4D\sqrt{8Dt + \omega_{0e}^2}} \right), \quad (3.48)$$

em que I_n é a função de Bessel modificada de primeira espécie. A expressão para $u_z^{(0)}(r,0,t)$ (3.48) é o deslocamento na direção z sem considerar fluxo de calor para o fluido[9]. O segundo termo da equação (3.46) é integrado numericamente, primeiro em τ e em seguida em α .

A Figura 3.3 mostra o perfil radial do deslocamento superficial sem considerar fluxo de calor para o meio. Os círculos representam o deslocamento na direção z, $u_z(r; z=0; t=0,2s)$, obtido por meio da equação (3.48) e as linhas o resultado obtido utilizando o método dos elementos finitos. Observa-se que os dados obtidos pelas simulações utilizando MEF se aproximam do resultado do modelo semi-infinito para maiores espessuras de amostra. Aparentemente, quando a espessura da amostra tender para infinito, o resultado obtido por MEF tenderá ao resultado calculado pela equação (3.48).

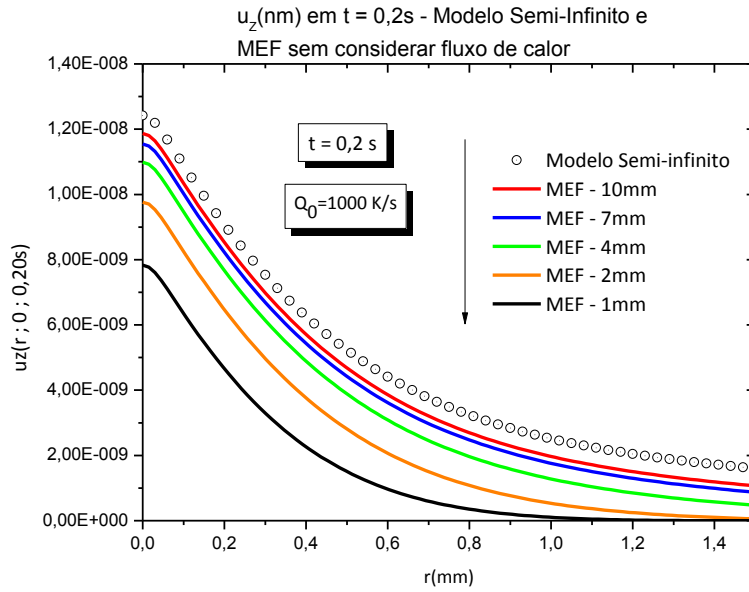


Figura 3.3 – Deformação superficial na amostra induzida pela variação de temperatura. As linhas representam os resultados obtidos por MEF e os círculos o resultado obtido por meio da equação (3.48).

Vimos na Figura 3.3 que o modelo teórico para amostra semi-infinita não descreve corretamente o deslocamento superficial para amostra com espessuras pequenas e que quanto maior a espessura da amostra menor será o erro cometido no deslocamento superficial ao utilizar a solução para amostra semi-infinita. No entanto, vimos no capítulo 1 que a fase induzida no laser de prova pode ser expressa pela equação (1.10),

$$\Phi_{ET}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2[u_z(r,0,t) - u_z(0,0,t)].$$

Nessa definição, a diferença de fase é relativa ao pico de deformação, $u_z(0,0,t)$. A Figura 3.4 mostra o deslocamento relativo calculado utilizando o modelo semi-infinito, equação (3.48), e MEF para diferentes espessuras de amostra. Embora o deslocamento superficial varie muito com a espessura da amostra, o deslocamento relativo não possui o mesmo comportamento. Para $r < 0,5\text{mm}$, o deslocamento relativo é praticamente o mesmo para amostra com espessuras maiores que 1mm . Por essa

razão o modelo de amostra semi-infinita pode ser utilizado para descrever a mudança de fase na técnica de espelho térmico sem induzir erros consideráveis. Observamos também que o diâmetro do laser de prova na amostra é da ordem de $300\mu m$, de forma que para amostras da ordem de $2mm$ o modelo semi-infinito pode ser aplicado.

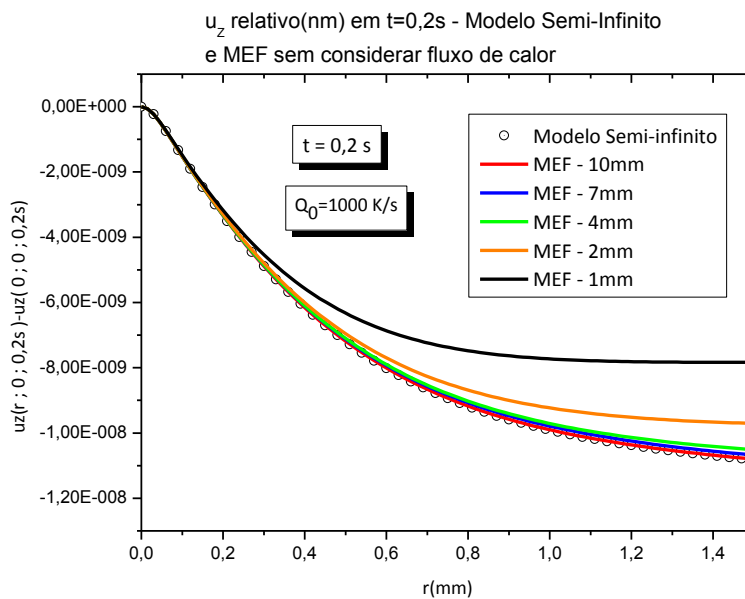


Figura 3.4 – Perfil radial do deslocamento relativo na superfície do vidro para várias espessuras de amostras.

A Figura 3.5 mostra o deslocamento superficial na direção z , $u_z(r; z=0; t=0,2s)$, na amostra após 200ms de exposição ao laser de excitação. Os dados foram obtidos utilizando as equações (3.48) para a curva sem fluxo de calor e a equação (3.46) para o deslocamento considerando fluxo de calor. Observe que o efeito de fluxo de calor somente é significativo para o deslocamento no caso acoplamento amostra-água. Para o ar como fluido adjacente, podemos calcular o perfil de deslocamento considerando a expressão (3.48) sem desvio significativo.

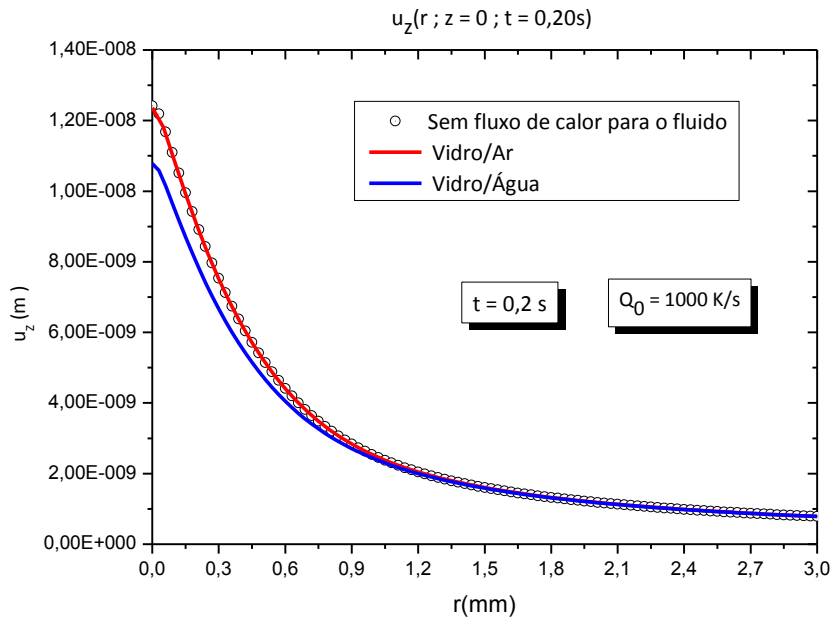


Figura 3. 5 – Módulo do deslocamento na direção z em função do raio na superfície da amostra ($z = 0$). Os círculos representam o deslocamento sem considerar fluxo de calor, a curva em vermelho representa o deslocamento considerando fluxo de calor para o ar e a linha em azul considerando fluxo de calor para a água.

A Figura 3.6 foi obtida utilizando o *software Comsol Multiphysics 3.5a*, esta ilustração mostra a deformação na amostra devido a variação de temperatura induzida por um feixe laser. O eixo z é o eixo de simetria. A deformação está ampliada para que seja possível visualizá-la. As cores da figura representam o deslocamento na amostra na direção z, como mostra a escala. Não foi considerado o fluxo de calor para o meio. Imagem ilustrativa do efeito.

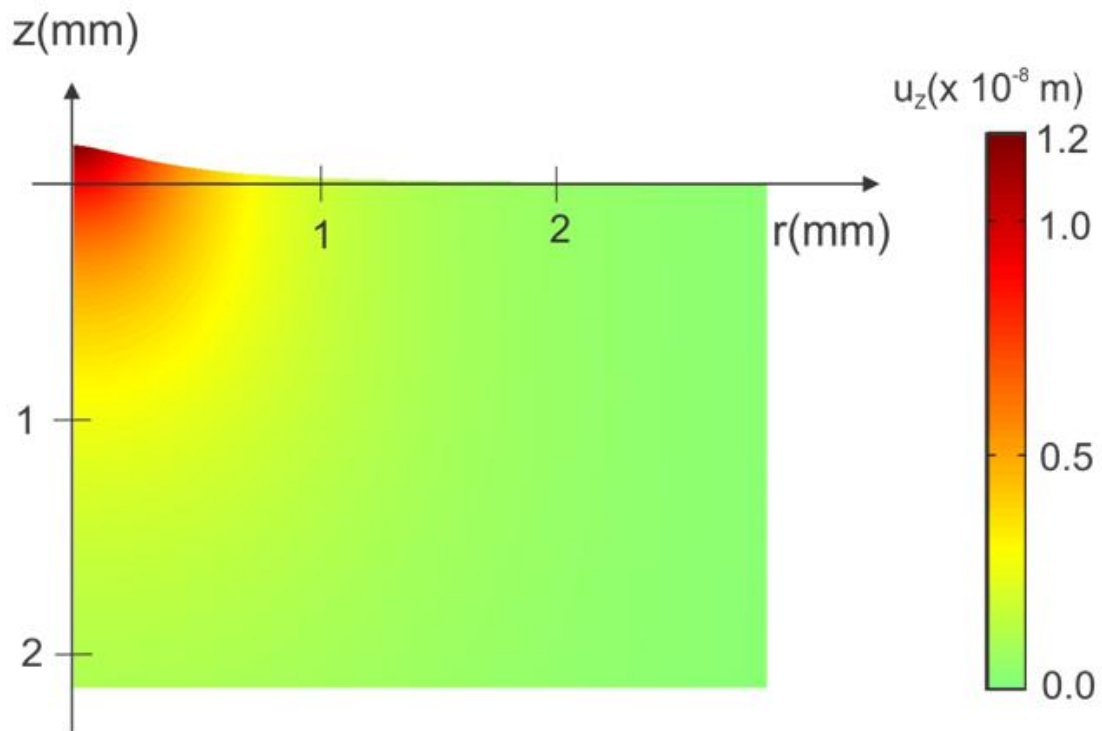


Figura 3.6 – Perfil de deslocamento na amostra utilizando MEF para um tempo de exposição ao laser de excitação igual a 200ms e termo de fonte $Q_0 = 1000$ K/s, a espessura da amostra utilizada nessa simulação foi 10 mm.

Capítulo 4

Modelo teórico para a lente térmica e espelho térmico

4.1 Lente Térmica

Na técnica de lente térmica, um gradiente de temperatura dentro da amostra e no fluido induz um gradiente do índice de refração, atuando como um elemento óptico, causando uma mudança de fase na frente de onda do feixe de prova que atravessa a amostra e percorre até o fotodetector. Para amostras de baixa absorção óptica podemos utilizar a expressão da temperatura encontrada para um espaço semi-infinito, pois como vimos, a temperatura encontrada por meio dessa solução está de acordo com o resultado obtido utilizando o método de elementos finitos. Para obter a mudança de fase induzida no feixe de prova devido à amostra de espessura L utilizamos a seguinte expressão

$$\Phi_{LT(s)}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} 2 \int_0^{L/2} [T_s(r,z,t) - T_s(0,z,t)] dz, \quad (4.1)$$

a integração é feita no intervalo $0 < z < L/2$, e o resultado é multiplicado por um fator 2. Isso pode ser feito pois o integrando da equação (4.1) é par em torno de $L/2$.

A fase induzida no feixe de prova devido ao fluido é dada por

$$\Phi_{LT(f)}(r,t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \left(\frac{dn}{dT} \right)_f 2 \int_{-\infty}^0 [T_f(r,z,t) - T_f(0,z,t)] dz. \quad (4.2)$$

O fator 2 na equação (4.2) é devido ao fato de ter fluido em ambos os lados da amostra. Como vimos nas simulações feitas no capítulo 2, para o caso de baixa absorção óptica, a temperatura nos dois lados da amostra são aproximadamente iguais. Por esta razão, a fase induzida por cada camada de fluido pode ser considerada equivalente. A mudança de fase total induzida no laser de prova é a soma das contribuições na amostra e no fluido

$$\Phi_{LT}(r,t) = \Phi_{LT(s)}(r,t) + \Phi_{LT(f)}(r,t). \quad (4.3)$$

Substituindo a expressão da temperatura na amostra, equação (2.37), na equação (4.1), fazendo a integração em z e introduzindo a variável adimensional $g = (r / \omega_{1p})^2$, obtemos a mudança de fase induzida pela amostra

$$\Phi_{LT(s)}(g,t) = \theta_{TL} \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2\alpha^2} \int_0^t A(\alpha,t) d\tau [J_0(\alpha\omega_{0e}\sqrt{mg}) - 1] \alpha d\alpha, \quad (4.4)$$

com

$$\begin{aligned} A(\alpha,t) = & \frac{L}{2} e^{-D\alpha^2\tau} - \frac{k_f D}{(k^2 D_f - k_f^2 D) \alpha \xi} \operatorname{Erf} \left(\frac{L}{4\sqrt{D(t-\tau)}} \right) \times \\ & \times \left[D_f \left(k \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{D_f\tau}) - k_f \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{D\tau}) \right) \right. \\ & \left. - (D_f - \xi) e^{-\xi\alpha^2\tau} \left(\frac{k\sqrt{D_f}}{\sqrt{D_f - \xi}} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{\tau}\sqrt{D_f - \xi}) - \frac{k_f\sqrt{D}}{\sqrt{D - \xi}} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{\tau}\sqrt{D - \xi}) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que

$$\theta_{LT} = \frac{4\pi}{\lambda_p} \left(\frac{ds}{dT} \right) Q_0, \quad (4.6)$$

e

$$m = \omega_{1p}^2 / \omega_{0e}^2. \quad (4.7)$$

Substituindo a expressão da temperatura do fluido, dada pela equação (2.38), na equação (4.2) e fazendo a integral em z e em τ obtemos a mudança de fase devido ao fluido

$$\Phi_{LT(f)}(g, t) = \theta_f \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2 \alpha^2} k D_f B(\alpha, t)}{(k^2 D_f - k_f^2 D) \alpha^2 \xi} \left[J_0(\alpha \omega_{0e} \sqrt{mg}) - 1 \right] d\alpha, \quad (4.8)$$

com

$$B(\alpha, t) = k \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{D_f t}) - k_f \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{D t}) - e^{-\xi \alpha^2 t} \times \left[\frac{k \sqrt{D_f}}{\sqrt{D_f - \xi}} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{(D_f - \xi)t}) - \frac{k_f \sqrt{D}}{\sqrt{D - \xi}} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{(D - \xi)t}) \right] \quad (4.9)$$

e

$$\theta_f = \frac{4\pi}{\lambda_p} \left(\frac{dn}{dT} \right)_f Q_0. \quad (4.10)$$

Utilizando as expressões (4.4) e (4.8) podemos simular a fase induzida pela amostra e pelo fluido adjacente no experimento de lente térmica. Consideremos que os parâmetros da simulação sejam dados pelos valores descritos na Tabela I, que se encontra na página 23.

A Figura 4.1 representa a mudança de fase induzida pela variação de temperatura, de um vidro padrão na presença do ar, após 200 milissegundos de exposição ao laser de excitação. Os círculos representam a mudança de fase, no caso em que não há perda de calor da amostra para o ar. A linha vermelha representa a mudança de fase devido ao vidro considerando fluxo de calor, obtida a partir da equação (4.4). A linha verde representa a mudança de fase no feixe de prova devido ao ar, descrita pela equação (4.8). Observa-se que a contribuição do vidro sem considerar fluxo de calor, para a mudança de fase do laser de prova, não difere significativamente em relação à contribuição considerando fluxo de calor. A linha azul mostra a mudança

de fase total induzida no laser de prova, ou seja, a contribuição do vidro mais a do ar, equação (4.3).

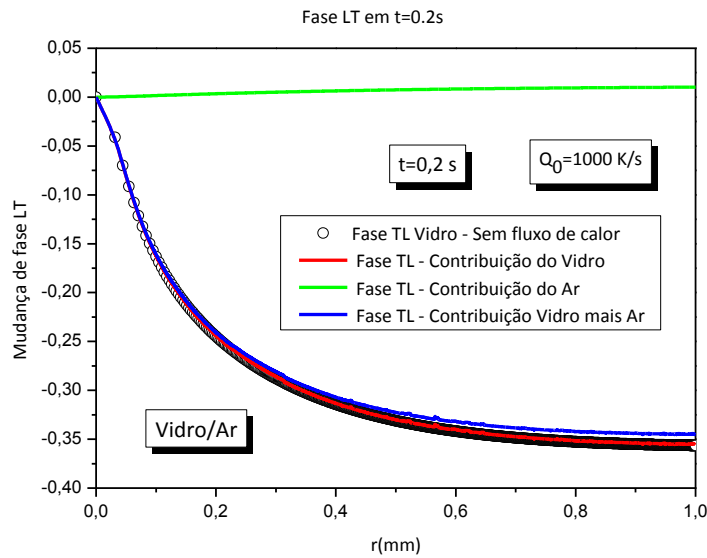


Figura 4.1 – Mudança de fase na técnica de lente térmica para um vidro padrão em contato com o ar adjacente.

Conhecida a mudança de fase no laser de prova podemos calcular o campo elétrico no plano do fotodetector efetuando a integral na equação (1.1), com a fase dada pela equação (4.3), obtendo

$$U(Z_1 + Z_2, t) = C \int_0^{\infty} \exp[-(1 + iV)g - i\Phi_{(s)}(g, t) - i\Phi_{(f)}(g, t)] dg. \quad (4.11)$$

Como vimos, a intensidade no centro do feixe no fotodetector é $I(t) = |U(Z_1 + Z_2, t)|^2$.

A Figura 4.2 mostra um transiente de LT para o vidro padrão, com as propriedades dadas pela Tabela I. Os círculos representam o sinal de LT sem considerar acoplamento térmico entre vidro-ar, a linha vermelha é a contribuição do vidro para o sinal de LT considerando fluxo de calor para o ar, a linha verde é a contribuição do ar e a linha em azul considera a contribuição do vidro mais a do ar. A intensidade do transiente com acoplamento térmico desvia ligeiramente do valor sem considerar

fluxo de calor. Essa diferença pode levar a um desvio da difusividade térmica e do parâmetro θ em torno de 2%.

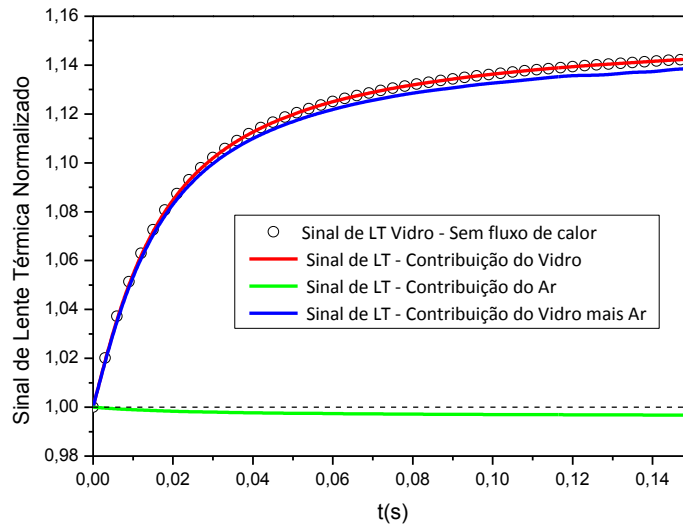


Figura 4.2 – Sinal de LT normalizado para um vidro padrão em contato com ar.

A Figura 4.3 representa a mudança de fase induzida no feixe de prova considerando fluxo de calor entre o vidro padrão e água. Podemos observar que a contribuição do vidro para a mudança de fase diminui quando comparada ao modelo sem fluxo de calor. Além disso, ao se utilizar água em torno da amostra, um grande efeito aparece, pois a mudança de fase devido à água é da mesma ordem e de sinal contrário à mudança de fase devido ao vidro.

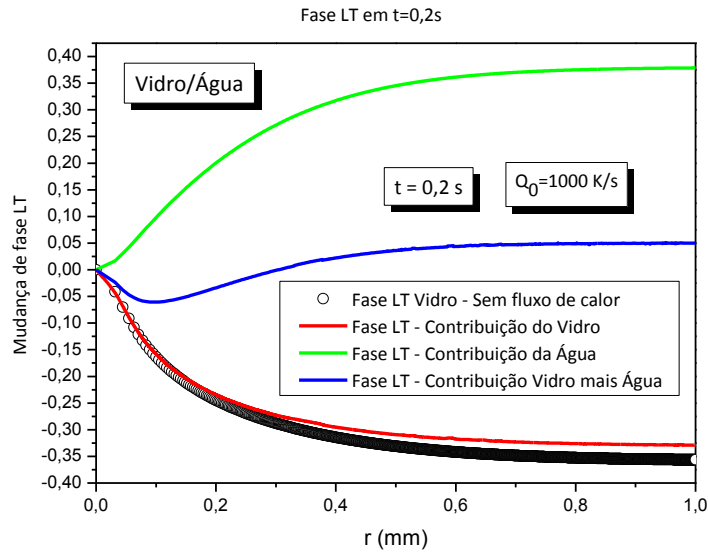


Figura 4.3 - Mudança de fase na técnica de lente térmica para um vidro padrão em contato com a água adjacente.

A Figura 4.4 mostra a intensidade do sinal de LT com acoplamento térmico vidro água. Notamos que a contribuição da água é da mesma ordem e de sentido oposto à contribuição do vidro.

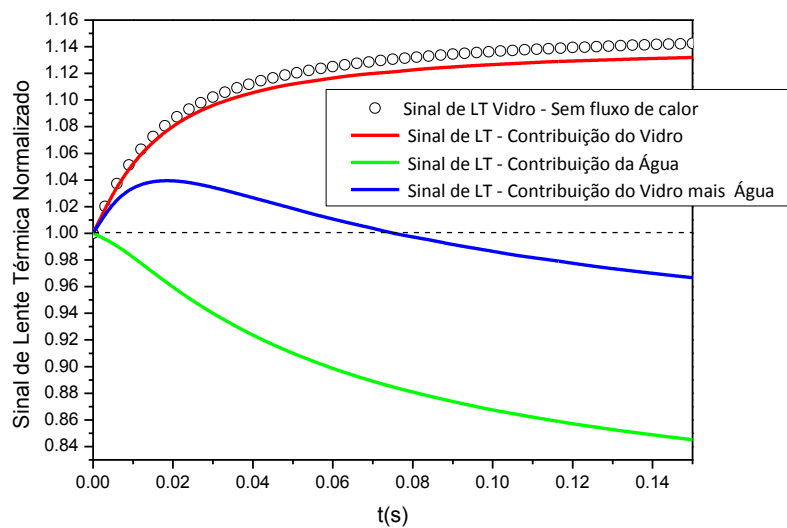


Figura 4.4 – Sinal de LT normalizado para um vidro padrão em contato com água.

A contribuição do ar para a mudança de fase é praticamente desprezível quando comparada a contribuição do vidro com as propriedades descritas na Tabela I. Isso ocorre pois o coeficiente de caminho óptico com a temperatura, ds/dT , do vidro padrão é muito maior do que o dn/dT do ar. Já o dn/dT da água é da ordem do ds/dT do vidro, de tal forma que as contribuições são da mesma ordem de grandeza. A contribuição do fluido adjacente pode ser maior ou menor dependendo das propriedades do vidro utilizado. O vidro Q-98 da Kigre possui pequeno ds/dT , com isso a contribuição do ar deve ser relevante. A Figura 4.5 mostra o sinal de lente térmica do vidro Q-98 no ar. Observa-se que a contribuição do ar induz uma grande variação na intensidade do sinal.

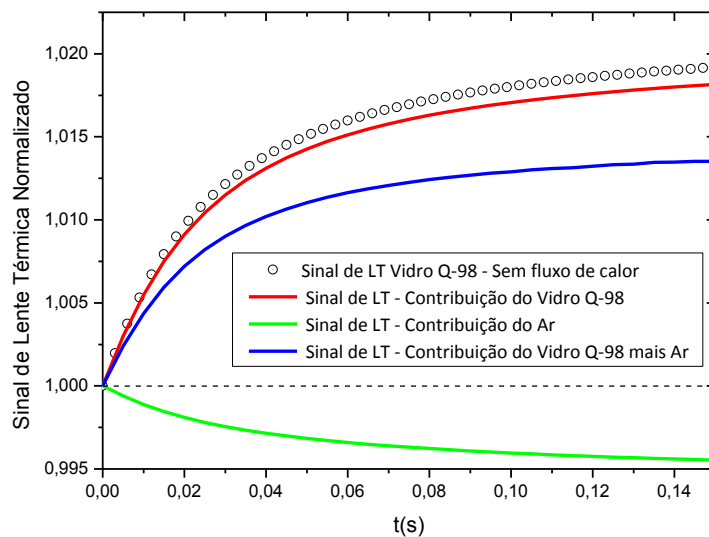


Figura 4.5 – Sinal de LT normalizado para o vidro Q-98 em contato com ar.

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram a mudança de fase na técnica de LT do vidro Q-98 inserido na água e a intensidade do sinal devido a esta mudança de fase. Nota-se que a contribuição principal se deve a água, pois o vidro Q-98 possui pequeno valor do ds/dT . A diferença de fase induzida pela amostra considerando fluxo de calor e sem considerar fluxo de calor é relativamente pequena comparada com a contribuição do fluido. Neste caso, para amostra, podemos utilizar a expressão para a fase sem acoplamento térmico.

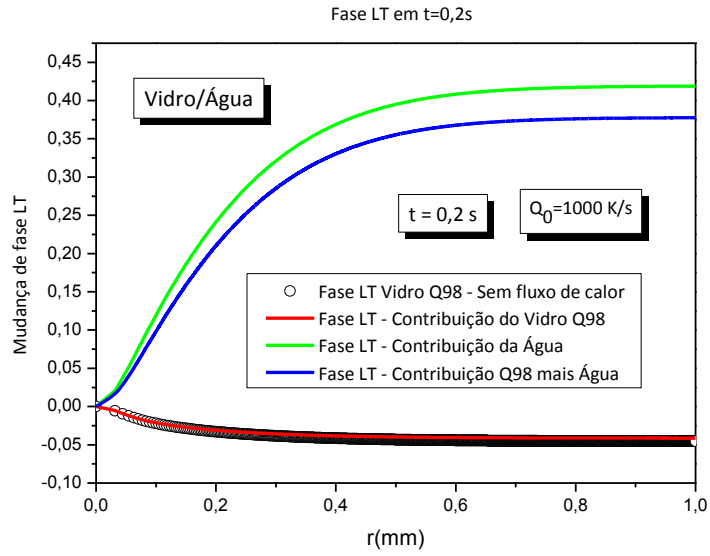


Figura 4.6 - Mudança de fase na técnica de lente térmica para o vidro Q-98 em contato com a água adjacente.

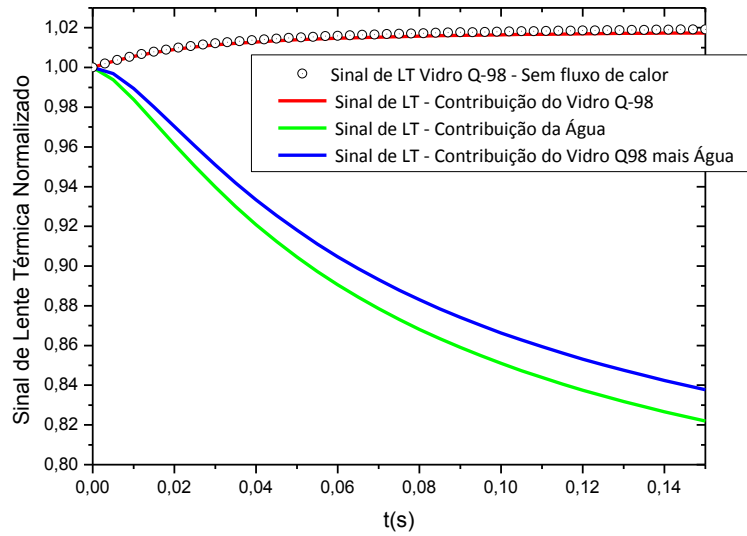


Figura 4.7 – Sinal de LT normalizado para o vidro Q-98 em contato com água.

4.2 Espelho Térmico

Para a técnica de espelho térmico, a mudança de fase é devido ao deslocamento que a superfície da amostra sofre em consequência da mudança de temperatura. A superfície da amostra atua como um elemento óptico, causando uma mudança de fase na porção do feixe de prova refletido. A mudança de fase no feixe de prova devido à deformação na superfície é dado por

$$\Phi_{ET(s)} = \frac{2\pi}{\lambda_p} 2[u_z(r,0,t) - u_z(0,0,t)]. \quad (4.12)$$

A mudança de fase total é obtida somando a contribuição do ET na amostra com o efeito de LT no fluido,

$$\Phi_{ET}(r,t) = \Phi_{ET(s)}(r,t) + \Phi_{LT(f)}(r,t). \quad (4.13)$$

Para encontrar a fase induzida pela superfície da amostra na técnica de ET substituímos a equação (3.46) na equação (4.12) obtendo

$$\Phi_{ET(s)}(g,t) = \theta_{ET} \frac{\omega_{0e}^2}{4} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{8}\omega_{0e}^2\alpha^2} \int_0^t C(\alpha,t) d\tau [J_0(\alpha\omega_{0e}\sqrt{mg}) - 1] \alpha d\alpha, \quad (4.14)$$

com

$$\begin{aligned} C(\alpha,t) = & \frac{e^{-D\alpha^2\tau}}{\alpha} - \frac{k_f D \operatorname{Erfc}(\alpha\sqrt{D(t-\tau)})}{(k^2 D_f - k_f^2 D)\alpha\xi} \times \\ & \times \left\{ D_f \left[k \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{D_f\tau}) - k_f \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{D\tau}) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{(D_f - \xi)}{e^{\xi\alpha^2\tau}} \left(\frac{k\sqrt{D_f}}{\sqrt{D_f - \xi}} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{(D_f - \xi)\tau}) - \frac{k_f\sqrt{D}}{\sqrt{D - \xi}} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{(D - \xi)\tau}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e

$$\theta_{ET} = -\frac{4\pi}{\lambda_p} [2(1+\nu)\alpha_\tau] Q_0. \quad (4.16)$$

As Figuras 4.8 e 4.9 mostram a mudança de fase a menos de uma constante $4\pi / \lambda_p$. A diferença entre a mudança de fase na amostra considerando fluxo de calor para o ar ou não é insignificante. No caso do acoplamento térmico vidro água esta diferença é mais pronunciada. Observa-se na Figura 4.9 uma excelente concordância entre a solução semi-analítica e os resultados obtidos utilizando MEF.

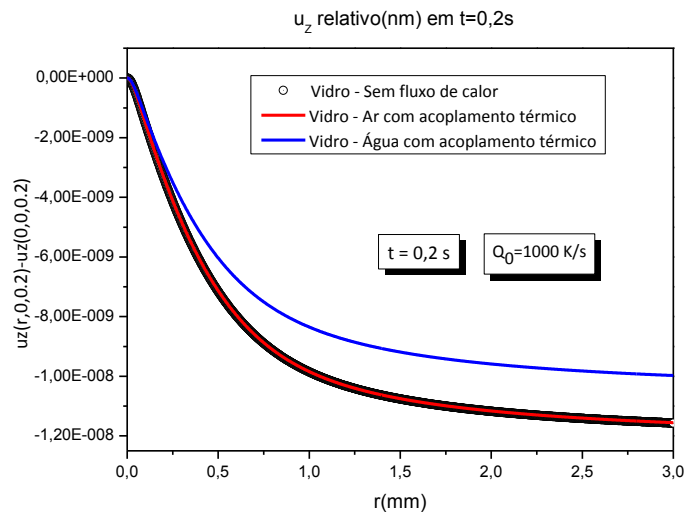


Figura 4. 8 - Deslocamento relativo na superfície do vidro padrão considerando fluxo de calor para o fluido e sem considerar fluxo. As soluções que consideram acoplamento térmico foram obtidas por meio da equação (3.46) e o resultado que não considera fluxo de calor por meio da equação (3.48).

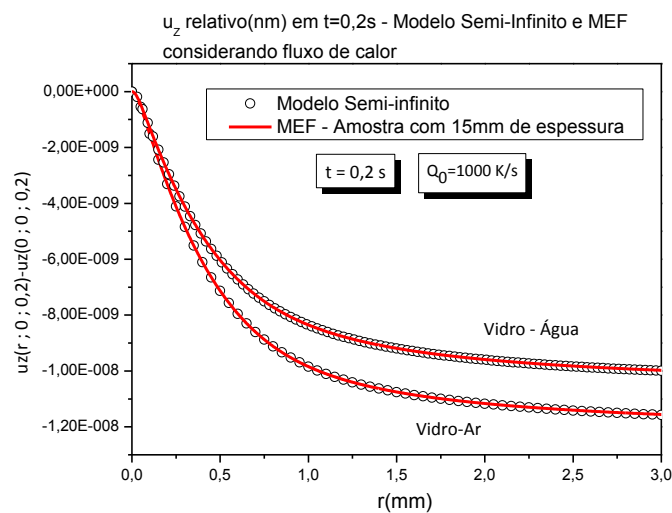


Figura 4. 9 - Deslocamento relativo na superfície do vidro padrão considerando acoplamento térmico entre vidro e fluido.

As Figuras 4.10 e 4.11 mostram o sinal de ET normalizado para uma amostra padrão no ar e na água respectivamente. Em ambos os casos o efeito de LT no fluido é perceptível, porém, no caso da água, esse efeito é muito mais significativo.

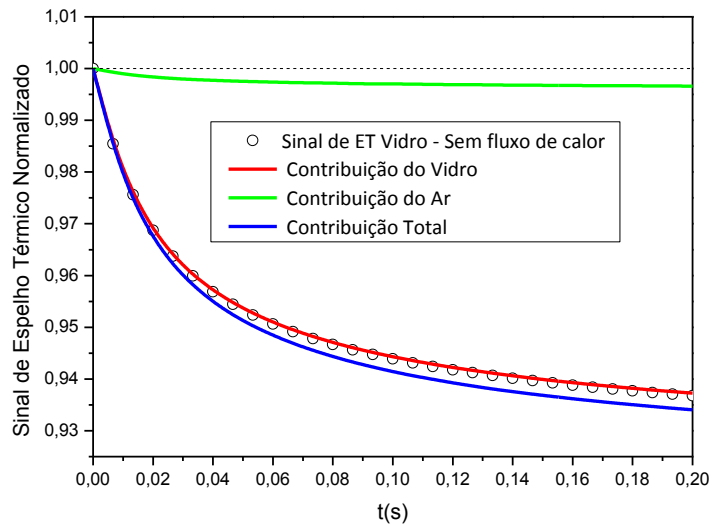


Figura 4. 10 – Sinal de ET normalizado para um vidro padrão em contato com ar.

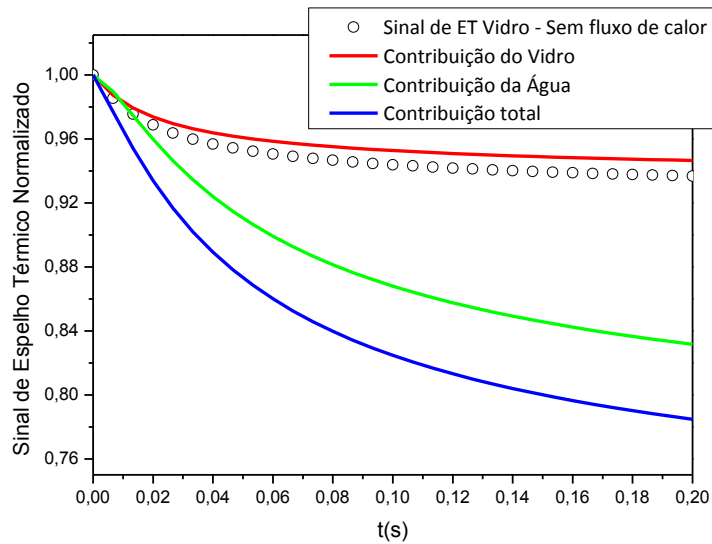


Figura 4. 11 - Sinal de ET normalizado para um vidro padrão em contato com água.

Capítulo 5

Conclusão

A solução analítica para o gradiente de temperatura e para o deslocamento termoelástico foi obtida levando em consideração o acoplamento térmico entre amostra e fluido. A solução analítica foi comparada com os resultados obtidos utilizando método dos elementos finitos, mostrando concordância com os mesmos. Os sinais de LT e ET foram simulados por meio das equações obtidas considerando fluxo de calor entre amostra e fluido. Para a interface vidro ar, os resultados mostraram que a contribuição do vidro não muda significativamente quando comparado com a solução sem acoplamento térmico. Porém, a contribuição do efeito de LT no ar é aproximadamente 2% da contribuição do vidro padrão. Para vidros com baixo ds/dT , a contribuição do ar se torna maior. O efeito de LT no fluido circundante à amostra é mais significativo para água do que para o ar. Estas soluções abrem a possibilidade de aplicar a técnica de LT e ET no estudo do fluido transparente adjacente à amostra, utilizando uma amostra sólida com os parâmetros bem conhecidos.

As soluções encontradas são também de interesse para o estudo do acoplamento térmico entre amostras e fluidos de um modo geral. Além disto, a solução para temperatura do fluido pode ser utilizada em outros métodos fototérmicos, como por exemplo, o efeito miragem dependente do tempo. Neste caso, também podemos estudar propriedades dos fluidos adjacentes, utilizando uma amostra conhecida como fonte de geração de calor.

Referências Bibliográficas

- [1] S. E. Bialkowski, *Photothermal Spectroscopy Methods for Chemical Analysis* (Wiley, New York, 1996).
- [2] M. P. Belançon, Análises das técnicas de espelho térmico e de lente térmica para o estudo de materiais semitransparentes e opacos, Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2009).
- [3] J. C. Cheng, L. Wu and S.Y. Zhang, *J. Appl. Phys.* **76**, 716 (1994).
- [4] M. Sheik-Bahae, A. A. Said, and E. W. Van Stryland, *Opt. Lett.* **14**, 955 (1989).
- [5] A. C. Boccara, D. Fournier, and J. Badoz, *Appl. Phys. Lett.* **36**, 130 (1980).
- [6] J. P. Gordon, R. C. C. Leite, R. S. More, S. P. S. Porto, and J. R. Whinnery, *J. Appl. Phys.* **36**, 3 (1965).
- [7] J. Shen, R. D. Lowe, and R. D. Snook, *Chem. Phys.* **165**, 385 (1992).
- [8] M. L. Baesso, J. Shen, and R. D. Snook, *J. Appl. Phys.* **75**, 3732 (1994).
- [9] N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, P. R. B. Pedreira, A. C. Bento, M. L. Baesso, and J. Shen, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 191908 (2007).
- [10] L. C. Malacarne, F. Sato, P. R. B. Pedreira, A. C. Bento, R. S. Mendes, M. L. Baesso, N. G. C. Astrath, and J. Shen, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 131903 (2008).
- [11] L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, G. V. B. Lukasiewicz, E. K. Lenzi, M. L. Baesso, and S. E. Bialkowski, *Appl. Spectrosc.* **65**, 99 (2011).
- [12] S. M. Lima, J. A. Sampaio, T. Catunda, A. C. Bento, L. C. M. Miranda and M. L. Baesso, *J. Non-Cryst. Solids* **273**, 215(2000).

- [13] A. R. Nunes, Avaliação quantitativa das propriedades ópticas e térmicas do monocristal Nd:YAG em função da temperatura, Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2003).
- [14] R. G. Oliveira, Aplicação de parâmetros termo-ópticos para o monitoramento da degradação de óleos vegetais, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2009).
- [15] R. Constantino, Espectroscopia de Lente Térmica: um novo método para a avaliação da oxidação e da eficiência da reação de transesterificação durante a produção de biodiesel, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2009).
- [16] J. Mura, Espectroscopia de Lente Térmica e técnicas convencionais aplicadas no estudo de biopolímeros e do PVA em função da temperatura, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2005).
- [17] E. Sehn. Dinâmica da desnaturação térmica das proteínas do sangue e fotoestabilidade de formulações de uso tópico: Estudo quantitativo com métodos fototérmicos, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2009).
- [18] P. R. B. Pedreira, Desenvolvimento de um protótipo de lente térmica resolvida no tempo para estudos de líquidos em condições transitórias em tempo real, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2005).
- [19] L. C. Malacarne, N. G. C. Astrath, P. R. B. Pedreira, R. S. Mendes, M. L. Baesso, P. R. Joshi, and S. E. Bialkowski, *J. Appl. Phys.* **107**, 053104 (2010).
- [20] F. Sato, Desenvolvimento da Técnica de Espelho Térmico, Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2009).
- [21] O. A. Sierra, Caracterização termo-óptica de polímeros em função da temperatura via espectroscopia de lente térmica e espelho térmico, Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Física, UEM (2011).
- [22] B. C. Li, *J. Appl. Phys.* **68**, 482 (1990).

- [23] W. Nowacki, Thermoelasticity (Pergamon, Oxford, 1982). Vol. 3, p.11.
- [24] F. Sato, L. C. Malacarne, P. R. B. Pedreira, M. P. Belancon, R. S. Mendes, M. L. Baesso, N. G. C. Astrath, and J. Shen, J. Appl. Phys. **104**, 053520 (2008).
- [25] N. G. C. Astrath, F. B. G. Astrath, J. Shen, J. Zhou, C. E. Gu, L. C. Malacarne, P. R. B. Pedreira, A. C. Bento, and M. L. Baesso, Appl. Phys. B **94**, 473 (2009).
- [26] N. G. C. Astrath, L. C. Malacarne, V. S. Zanuto, M. P. Belancon, R. S. Mendes, M. L. Baesso, and C. Jacinto, J. Opt. Soc. Am. B, **28**, 1735 (2011).
- [27] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics (Prentice Hall, New Jersey, 1999).
- [28] E. Butkov, Física Matemática (Ed. Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro ,1978).
- [29] M. L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences (John Wiley&Sons, New York, 1961).
- [30] R. M. Eisberg, L. S. Lerner, Física Fundamentos e Aplicações, Vol.2 (McGraw-Hill, São Paulo, 1983).