DOI: 10.4025/actascitechnol.v31i1.2838

Soluções para a equação de difusão com um termo não-local

Ervin Kaminski Lenzi[1*], Marcelo Kaminski Lenzi[2], Roberto Rossato[1] e Luiz Carlos Martins Filho[1]

[1]*Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá, Paraná, Brasil.* [2]*Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil. *Autor para correspondência. E-mail: eklenzi@dfi.uem.br*

RESUMO. Neste trabalho, foram obtidas soluções para a equação da difusão na presença de um termo não-local dependente de variáveis espaciais e temporais utilizando a técnica de função de Green. O termo não-local incorporado na equação da difusão pode ser relacionado a vários contextos de interesse físico, como, por exemplo, derivadas de ordem fracionárias espaciais ou temporais, e introduz diferentes regimes de dispersão para a solução. Os resultados encontrados aqui também permitem a descrição de uma extensa classe de processos difusivos, em particular das situações caracterizadas pela difusão anômala.

Palavras-chave: equação de difusão, soluções exatas, difusão anômala.

ABSTRACT. Solutions for diffusion equation with a nonlocal term. This work is devoted to investigating solutions for the diffusion equation with a nonlocal spatial and time-dependent term by using the Green function approach. This nonlocal term incorporated in the diffusion equation may be related to several physical contexts – in particular with the fractional spatial and time derivatives and reaction processes. It also introduces different regimes for the diffusion process and may be connected to a rich class of anomalous diffusive processes.

Key words: diffusion equation, nonlocal term, anomalous diffusion.

Introdução

Recentemente, extensões da equação de difusão têm sido sucessivamente investigadas pela grande variedade de aplicações existentes, em particular a difusão anômala. Entre elas, têm-se as equações de difusão fracionárias (HILFER, 2000; METZLER; KLAFTER, 2000; HILFER et al., 2002; HEINSALU et al., 2007) que têm sido aplicadas a várias situações físicas, tais como o transporte de uma substância de um recipiente a outro num solvente por meio de membranas finas (KOSZTOLOWICZ et al., 2005), no transporte em semicondutores desordenados (UCHAIKIN; SIBATOV, 2008), meios porosos (VALDES-PARADA et al., 2007), no fluxo de fluidos (CHUKBAR; ZABURDAEV, 2005) e no estudo do desenvolvimento de tumores modelando a taxa de disseminação do câncer (IOMIN, 2006; FEDOTOV; IOMIN, 2007). Esta grande variedade de aplicações também motivou o estudo de vários aspectos formais das equações de difusão fracionárias, na tentativa de compreender sua aplicação na descrição de situações que possuem comportamento dinâmico diferente do usual. De fato, Metzler et al. (1999) mostraram como uma equação fracionária de Fokker-Planck pode ser derivada da equação mestra generalizada, Ryabov (2003) estudou o comportamento da equação de difusão fracionária na origem, Kalmykov et al. (2007) introduziram uma equação fracionária de Kramers consistente com as equações fracionárias de difusão, a presença de reação têm sido analisadas por diversos pesquisadores (SEKI et al., 2003; YUSTE et al., 2004) e várias soluções têm sido obtidas para estas equações (EL-WAKIL et al., 2001; AGRAWAL, 2002; HANYGA, 2002; LENZI et al., 2003a; LENZI et al., 2003b; REN et al., 2003; ACHAR; HANNEKEN, 2004; LENZI et al., 2005; LANGLANDS, 2006; SILVA et al., 2007; GONÇALVES et al., 2004; GONÇALVES et al., 2005; GONÇALVES et al., 2006; BADINI et al., 2007). Nesse sentido, este trabalho foi dedicado ao estudo da seguinte equação de difusão:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t) - \int_0^t d\bar{t}\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}\,\mathcal{K}(x-\bar{x},t-\bar{t})\rho(\bar{x},\bar{t}) \tag{1}$$

A última parte da equação acima representa um termo não-local atuando no sistema que depende de $\mathcal{K}(x,t)$. Este termo pode ser relacionado a vários contextos em particular, com processos de reação (HENRY et al., 2006; SCHOT et al., 2007) e com derivadas de ordem fracionárias (PODLUBNY, 1999), dependendo da escolha de $\mathcal{K}(x,t)$ e é tal que, para $\mathcal{K}(x,t)=0$, a forma usual da equação de difusão na ausência de forças externas é recuperada. O comportamento da solução é governado pelos termos difusivo e não-local que, dependendo da escolha do último, pode manifestar diferentes regimes difusivos. Dessa forma, um deles é dominado pelo comportamento gaussiano, em virtude do termo difusivo, e o outro é dependente da escolha de $\mathcal{K}(x,t)$, conforme mencionado anteriormente. Em particular, para $\mathcal{K}(x,t)\propto \delta(t)/|x|^{1+\mu}$, a solução é assintoticamente governada por uma lei de potência para tempos longos, que está relacionada com as distribuições de Lévy. Nesse sentido, é importante ressaltar que situações caracterizadas pelos dois regimes têm sido relatadas em vários contextos físicos, como, por exemplo, sistemas com interações de longo alcance (LATORA et al., 1999) e difusão intracelular (CASPI et al., 2000; CASPI et al., 2002). A Equação 1 ainda pode ser relacionada com as equações de fracionárias de ordem distribuída (CHECHKIN et al., 2002; SOKOLOV et al., 2004).

Material e métodos

Equações de difusão e soluções

Serão estudadas soluções para a Equação 1, considerando algumas formas da função $\mathcal{K}(x,t)$, presentes no termo não-local da mesma. Particularmente, três casos serão analisados:

(i) $\mathcal{K}(x,t)\propto \delta(t)/|x|^{1+\mu}$ com $0<\mu<2$,

(ii) $\mathcal{K}(x,t)=\delta(t)\overline{\mathcal{K}}(x)$,

(iii) $\mathcal{K}(x,t)\propto t^{\gamma-1}/|x|^{1+\mu}$ com $0<\mu<2$.

Após o estudo destes casos, será discutido o caso em que $\mathcal{K}(x,t)$ representa uma função arbitrária que possui transformada de Fourier e de Laplace definidas. A primeira escolha para $\mathcal{K}(x,t)$ tem comportamento de cauda longa e está relacionada com a derivada espacial de ordem fracionária do tipo Riesz-Weyl (PODLUBNY, 1999). A solução para este caso apresenta dois regimes distintos, e um deles, para tempos longos, pode ser relacionado com as distribuições de Lévy. Esta característica poderá ser verificada ao analisar a função de Green no limite de tempos longos, como será demonstrado mais tarde. O segundo caso pode ser relevante na investigação da solução quando se tem um termo não-local com uma dependência arbitrária na parte espacial. A terceira escolha incorpora dependência temporal no termo não-local (discutida no primeiro caso), que poderá ser relacionada com derivada temporal de ordem fracionária (PODLUBNY, 1999) mediante uma escolha apropriada de γ.

Em princípio, para a análise, aplica-se a transformada de Fourier:

$$\left(\mathcal{F}\{\ldots\}=\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx}\ldots \text{ e } \mathcal{F}^{-1}\{\ldots\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}\ldots\right)$$

na Equação (1), de maneira a obter a equação íntegro-diferencial:

$$\frac{d}{dt}\rho(k,t)=-\mathcal{D}k^2\rho(k,t)-\int_0^t d\bar{t}\,\mathcal{K}(k,t-\bar{t})\rho(k,\bar{t}) \quad (2)$$

Essa equação íntegro-diferencial pode ser simplificada utilizando a transformada de Laplace:

$$\left(\mathcal{L}\{\ldots\}=\int_0^{\infty} dt e^{-st}\ldots \text{ e } \mathcal{L}^{-1}\{\ldots\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{+i\infty+c} ds e^{st}\ldots\right).$$

Assim, após aplicar a transformada de Laplace, obtém-se a equação algébrica:

$$s\rho(k,s)-\rho(k,0)=-\mathcal{D}k^2\rho(k,s)-\mathcal{K}(k,s)\rho(k,s) \quad (3)$$

cuja solução é dada por $\rho(k,s)=\rho(k,0)\mathcal{G}(k,s)$, com

$$\mathcal{G}(k,s)=\frac{1}{s+\mathcal{D}k^2+\mathcal{K}(k,s)} \quad (4)$$

em que:

$\rho(k,0)$ é a transformada de Fourier da condição inicial e $\mathcal{G}(k,s)$ é a função de Green da Equação (1), no espaço de Fourier-Laplace. Note que a Equação (4) retorna ao caso usual, isto é, à função de Green para o caso livre, quando $\mathcal{K}(k,s)=0$. Substituindo a primeira escolha por $\mathcal{K}(x,t)$, que no espaço de Fourier-Laplace é dado por $\mathcal{K}(k,s)=\tilde{\mathcal{K}}|k|^{\mu}$, obtém-se:

$$\rho(k,s)=\frac{\rho(k,0)}{s+\mathcal{D}k^2+\tilde{\mathcal{K}}|k|^{\mu}} \quad (5)$$

A Equação (5) pode ser relacionada ao formalismo CTRW (Continuous Time Random Walk) (METZLER; KLAFTER, 2000), considerando-se a distribuição do tempo de espera $\omega(s)=1/(1+s\tau)$ e a função densidade de probabilidade de salto $\lambda(k)=1-\tau(\mathcal{D}k^2+\tilde{\mathcal{K}}|k|^{\mu})$, em que τ é o tempo de espera característico. O resultado obtido para $\omega(s)$ e $\lambda(k)$ indica que a opção anterior para o termo não-local muda somente a função densidade de probabilidade do salto. Em particular, esta escolha para $\mathcal{K}(x,t)$ manifesta na solução um comportamento de cauda longa, quando é considerado o limite de tempos grandes. Aplicando a transformada inversa de Laplace, a Equação (5) é dada por:

$$\rho(k,t)=\rho(k,0)\exp\left(-\mathcal{D}k^2t-\tilde{\mathcal{K}}|k|^{\mu}\,t\right) \tag{6}$$

A transformada inversa de Fourier da Equação (6) é:

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\bar{x}\,\mathcal{G}(x-\bar{x},t)\rho(\bar{x},0)$$

$$\mathcal{G}(x,t)=\frac{1}{2|x|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\tilde{\mathcal{K}}t}{(\mathcal{D}t)^{\frac{\mu}{2}}}\right)^{n}\times H_{2,2}^{1,1}\left[\frac{|x|}{\sqrt{\mathcal{D}t}}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{n\mu}{2},\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)\\(1,1),\left(1,\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right.\right] \tag{7}$$

em que: $H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix}\right.\right]$ é a função H de Fox (MATHAI; SAXENA, 1978) (Figuras 1 e 2).

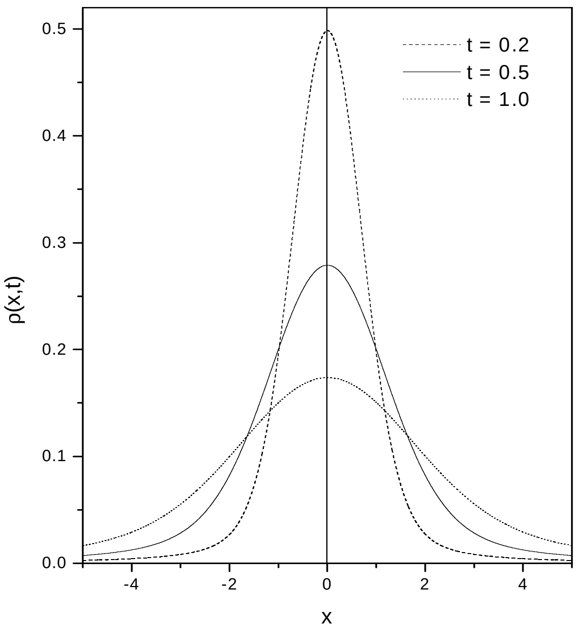

Figura 1. Comportamento de $\rho(x,t)$ versus x para diferentes valores de tempo considerando, por simplicidade, $\mu=1$, $\mathcal{D}=1$, $\mathcal{K}=1$ e a condição inicial $\rho(x,0)=\delta(x)$.

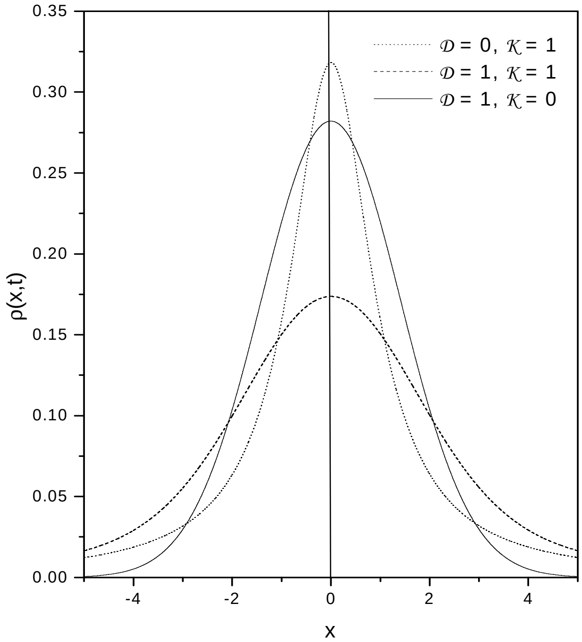

Figura 2. Comportamento de $\rho(x,t)$ versus x para diferentes valores de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{K}$ considerando, por simplicidade, $t=1$, $\mu=1$ e a condição inicial $\rho(x,0)=\delta(x)$.

A presença desta função na solução indica que o termo não-local na Equação (1) produz uma dispersão anômala da solução. Nesse sentido, uma característica importante da solução encontrada acima é a presença de dois regimes, um deles é caracterizado pelo caso usual (i.e., Gaussiano) e o outro é dominado assintoticamente por uma lei de potência (i.e., do tipo Lévy). De fato, é possível verificar que para tempos pequenos:

$$\mathcal{G}(x,t)\approx\frac{e^{-x^2/(4\mathcal{D}t)}}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}}, \tag{8}$$

enquanto que para tempos longos:

$$\mathcal{G}(x,t)\approx\frac{1}{\mu|x|}H_{2,2}^{1,1}\left[\frac{|x|}{(\mathcal{K}t)^{\frac{1}{\mu}}}\left|\begin{matrix}\left(1,\frac{1}{\mu}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)\\(1,1),\left(1,\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right.\right] \tag{9}$$

A Equação (9) é essencialmente a distribuição do tipo Lévy comumente encontrada em situações nas quais há difusão anômala.

Será conduzida a discussão ao segundo caso, caracterizado por $\mathcal{K}(x,t)=\bar{\mathcal{K}}(x)\delta(t)$, com $\bar{\mathcal{K}}(x)$ arbitrário. Utilizando a Equação (4), com $\mathcal{K}(k,s)=\bar{\mathcal{K}}(k)$, e aplicando a transformada inversa de Laplace, obtém-se:

$$\rho(k,t)=\rho(k,0)\exp\left(-\mathcal{D}k^2t-\bar{\mathcal{K}}(k)t\right) \tag{10}$$

Fazendo uso da transformada inversa de Fourier, juntamente com o teorema de convolução, na Equação (10), tem-se como solução:

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\overline{x}(\overline{x},0)\mathcal{G}(x-\overline{x},t)$$

$$\mathcal{G}(t)=\overline{\mathcal{G}}(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_n\overline{\mathcal{K}}(x-x_n)\ldots \tag{11}$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\overline{\mathcal{K}}(x_2-x_1)\overline{\mathcal{G}}(x_1,t)$$

em que:

$\rho(x,0)$ é a condição inicial e

$$\overline{\mathcal{G}}(x,t)=\frac{e^{-x^2/(4\mathcal{D}t)}}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \tag{12}$$

é a função de Green usual obtida a partir da equação de difusão na ausência de forças e termos de reação. De forma análoga ao caso explorado acima, este caso também pode ser relacionado ao formalismo CTRW escolhendo-se a distribuição do tempo de espera $\omega(s)=1/(1+s\tau)$ e distribuição dos saltos $\lambda(k)=1-\tau(\mathcal{D}k^2+\mathcal{K}(k))$.

Prosseguindo na análise, será incorporada a dependência temporal em $\mathcal{K}(x,t)$ considerando $\mathcal{K}(x,t)\propto t^{\gamma-1}/|x|^{1+\mu}$ ($\mathcal{K}(k,s)=\hat{\mathcal{K}}s^{-\gamma}|k|^{\mu}$), o que leva a obter, a partir da Equação (5),

$$\rho(k,s)=\frac{\rho(k,0)}{s+\mathcal{D}k^2+\hat{\mathcal{K}}s^{-\gamma}|k|^{\mu}} \tag{13}$$

Note que a Equação (13) retorna ao caso anterior, quando tomado $\gamma=0$, e ao caso usual, quando $\hat{\mathcal{K}}=0$. Por outro lado, esta dependência no termo não-local introduz efeito memória, de forma semelhante ao que ocorre com as equações temporais fracionárias de difusão. Desse modo, a solução obtida para este caso (assim como os casos previamente estudados) tem um caráter não-Markoviano. Para encontrar a solução, aplica-se a transformada inversa de Laplace. Seguindo o procedimento apresentado por Langlands (2006), após alguns cálculos, é possível mostrar que:

$$\rho(k,t)=\rho(k,0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\hat{\mathcal{K}}t^{1+\gamma}|k|^{\mu}\right)^n E_{1,1+n\gamma}^{(n)}\left(-\mathcal{D}k^2t\right) \tag{14}$$

em que:

$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(x)$ é a *n*-ésima derivada da função de Mittag-Leffler generalizada, isto é, $E_{\alpha,\beta}^{(n)}(x)\equiv\frac{d^n}{dx^n}E_{\alpha,\beta}(x)$ (PODLUBNY, 1999). A transformada inversa de Fourier da Equação (14) é dada por

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\overline{x}\rho(\overline{x},0)\mathcal{G}(x-\overline{x},t)$$

$$\mathcal{G}(x,t)=\frac{1}{2|x|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(-\frac{\hat{\mathcal{K}}t^{\gamma}}{(\mathcal{D}t)^{\frac{\mu}{2}}}\right)^n \tag{15}$$

$$\times H_{3,3}^{2,1}\left[\frac{|x|}{\sqrt{\mathcal{D}t}}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{n\mu}{2},\frac{1}{2}\right),\left(1+\left(1+\gamma-\frac{\mu}{2}\right)n,\frac{1}{2}\right)\\(1,1),\left(1-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)n,\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]$$

Neste contexto, a solução geral que considera uma forma arbitrária para o termo não-local pode ser encontrada utilizando a transformada inversa de Laplace e o Teorema da Convolução correspondente. Assim, após alguns cálculos de rotina, é mostrado que:

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\overline{x}\rho(\overline{x},0)\mathcal{G}(x-\overline{x},t)$$

$$\mathcal{G}(x,t)=\overline{\mathcal{G}}(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_n\int_0^t dt_n\overline{\mathcal{K}}(x-x_n,t-t_n)\ldots \tag{16}$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_0^{t_2}dt_1t_1^n\overline{\mathcal{K}}(x_2-x_1,t_2-t_1)\overline{\mathcal{G}}(x_1,t_1)$$

em que:

$\rho(x,0)$ é a condição inicial e $\overline{\mathcal{G}}(x,t)$ é dada pela Equação (12). A Equação (16) estende a Equação (11) e pode ser usada para obter soluções aproximadas quando o termo não-local permite ser considerado como uma perturbação na solução usual.

Resultados e discussão

Foi desenvolvida a equação da difusão considerando a presença do termo não-local. Particularmente, são as soluções exatas para os casos: (i) $\mathcal{K}(x,t)\propto\delta(t)/|x|^{1+\mu}$ ($\mathcal{K}(k,s)=\tilde{\mathcal{K}}|k|^{\mu}$), (ii) $\mathcal{K}(x,t)=\delta(t)\overline{\mathcal{K}}(x)$ ($\overline{\mathcal{K}}(k,s)=\overline{\mathcal{K}}(k)$), (iii) $\mathcal{K}(x,t)\propto t^{\gamma-1}/|x|^{1+\mu}$ ($\mathcal{K}(k,s)=\hat{\mathcal{K}}s^{-\gamma}|k|^{\mu}$), além da discutida na situação geral. O primeiro caso pode ser relacionado à derivada espacial fracionária e tem como casos particulares várias situações analisadas por Metzler e Klafter (2000) e Malacarne et al. (2006). A diferença crucial entre os resultados deste trabalho e os até então obtidos está na presença de regimes diferenciados de dispersão da solução. Esta característica é evidente, por exemplo, para o primeiro caso investigado. Neste cenário, para tempos pequenos, tem-se a condição usual de dispersão da solução, enquanto para tempos longos, a dispersão é caracterizada por uma função de Fox, cujo comportamento assintótico, neste caso, é uma lei de potência, de forma semelhante ao observado nas distribuições de Lévy. Para o segundo caso, formalmente, a solução para uma função arbitrária é $\tilde{\mathcal{K}}(x)$. No último caso, foi incorporada uma dependência temporal de potencial não-local que pode estar relacionada à derivada temporal fracionária, conforme for a escolha de γ. A dependência do termo não-local na variável do tempo introduz outros diferentes regimes de solução que não estão presentes no primeiro e no segundo casos e, consequentemente, nas situações analisadas por Metzler e Klafter (2000) e Malacarne et al. (2006). Outro aspecto digno de nota diz respeito à Equação (1), é sua relação com as equações de difusão fracionárias de ordem distribuída (CHECHKIN et al., 2002; SOKOLOV et al., 2004; MAINARDI; PAGNINI, 2007) mediante uma escolha apropriada do termo não-local.

Conclusão

Os resultados obtidos e discutidos acima indicam que a equação de difusão analisada neste trabalho, além de ter vários sistemas físicos como situação particular, pode ser útil na descrição de sistemas que possuem diferentes regimes difusivos e, consequentemente, têm difusão anômala. Nesse sentido, deve ser mencionado que ela pode ou não ter o segundo momento finito. No último caso, há distribuições do tipo Lévy. Por fim, acredita-se que este trabalho venha a ser útil, em geral, na discussão de sistemas que tenham processos anômalos de difusão e transporte.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro ao CNPq/INCT-SC, à Capes e à Fundação Araucária.

Referências

AGRAWAL, O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. **Nonlinear Dynamics**, v. 29, n. 1-4, p. 145-155, 2002.

ACHAR, B. N. N.; HANNEKEN, J. W. Fractional radial diffusion in a cylinder. **Journal Molecular Liquids**, v. 114, n. 1-3, p. 147-151, 2004.

BADINI, R. F. C.; GONÇALVES, G.; LENZI, M. K.; SANTOS, O. A. A.; JORGE, L. M. M.; LENZI, E. K. Equação de difusão não linear, soluções e difusão anômala. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 29, n. 2, p. 165-171, 2007.

CASPI, A.; GRANEK, R.; ELBAUM, M. Enhanced diffusion in active intracellular transport. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 26, p. 5655, 2000.

CASPI, A.; GRANEK, R.; ELBAUM, M. Diffusion and directed motion in cellular transport. **Physical Review E**, v. 66, n. 1, p. 011916-1-12, 2002.

CHECHKIN, A. V.; GORENFLO, R.; SOKOLOV, I. M. Retarding subdiffusion and accelerating superdiffusion governed by distributed-order fractional diffusion equations. **Physical Review E**, v. 66, n. 4, p. 046129-1-7, 2002.

CHUKBAR, K.; ZABURDAEV, V. Subdiffusion in random compressible flows. **Physical Review E**, v. 71, n. 6, p. 061105-1-6, 2005.

EL-WAKIL, S. A.; ELHANBALY, A.; ZAHRAN, M. A. Fractional (space-time) Fokker-Planck equation. **Chaos, Solutions, and Fractals**, v. 12, n. 6, p. 1035-1040, 2001.

FEDOTOV, S.; IOMIN, A. Migration and Proliferation Dichotomy in Tumor-Cell Invasion. **Physical Review Letters**, v. 98, n. 11, p. 118101-1-4, 2007.

GONÇALVES, G.; MORAES, L. S.; SANTOS, O. A. A.; LENZI, E. K. Soluções exatas para a equação de difusão fracionária: formalismo de função de Green. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 26, n. 2, p. 109-116, 2004.

GONÇALVES, G.; LENZI, M. K.; MORAES, L. S.; LENZI, E. K.; ANDRADE, M. F. Difusão anômala e equações fracionárias de difusão. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 27, n. 2, p. 123-131, 2005.

GONÇALVES, G.; LENZI, M. K.; LENZI, E. K.; ANTONIO, F. J.; SCHOT, A. Equação da difusão fracionária não-linear: solução exata, **Acta Scientiarum. Technology**, v. 28, n. 1, p. 47-53, 2006.

HANYGA, A. Multi-dimensional solutions of space-time-fractional diffusion equations. **Proceedings of the Royal Society A-Mathematical Physical and Engineering Sciences**, v. 458, n. 2018, p. 429-450, 2002.

HEINSALU, E. E.; PATRIARCA, M.; GOYCHUK, I.; HÄNGGI, P. Use and Abuse of a Fractional Fokker-Planck Dynamics for Time-Dependent Driving. **Physical Review Letters**, v. 99, n. 12, p. 120602-1-4, 2007.

HENRY, B. I.; LANGLANDS, T. A. M.; WEARNE, S. L. Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: From continuous time random walks to fractional reaction-diffusion equations. **Physical Review E**, v. 74, n. 3, p. 031116-1-15, 2006.

HILFER, R. **Applications of fractional calculus in physics**. Singapore: World Scientific, 2000.

HILFER, R.; METZLER, R.; BLUMEN, A.; KLAFTER, J. Strange Kinetics. **Chemical Physics**, v. 284, n. 1-2, p. 1-2, 2002.

IOMIN, A. Toy model of fractional transport of cancer cells due to self-entrapping. **Physical Review E**, v. 73, n. 6, p. 61918-1-5, 2006.

KALMYKOV, Y. P.; COFFEY, W. T.; SERGEY, V.; TITOV, S. V. Inertial effects in the fractional translational diffusion of a Brownian particle in a double-well potential. **Physical Review E**, v. 75, n. 3, p. 31101-1-8, 2007.

KOSZTOŁOWICZ, T.; DWORECKI, K.; MRÓWCZYŃSKI, S. T. How to Measure Subdiffusion parameters. **Physical Review Letters**, v. 94, n. 17, p. 170602-1-4, 2005.

LANGLANDS, T. A. M. Solution of a modified fractional diffusion equation. **Physica A**, v. 367, n. 1, p. 136-144, 2006.

LATORA, V.; RAPISARDA, A.; RUFFO, S. Superdiffusion and Out-of-Equilibrium Chaotic Dynamics with Many Degrees of Freedoms. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 11, p. 2104-2107, 1999.

LENZI, E. K.; MENDES, R. S.; ANDRADE, J. S.; DA SILVA, L. R.; LUCENA, L. S. N-dimensional fractional diffusion equation and Green function approach: Spatially dependent diffusion coefficient and external force on fractals. **Physical Review E**, v. 71, n. 5, p. 52101-1-4, 2005.

LENZI, E. K.; MENDES, R. S.; FA, K. S.; MALACARNE, L. C.; DA SILVA L. R. Anomalous diffusion: Fractional Fokker–Planck equation and its solutions. **Journal Mathematical Physics**, v. 44, n. 5, p. 2179-2185, 2003a.

LENZI, E. K.; MENDES, G. A.; MENDES, R. S.; DA SILVA, L. R.; LUCENA, L. S. Exact solutions to nonlinear nonautonomous space-fractional diffusion equations with absorption. **Physical Review E**, v. 67, n. 5, p. 051109-1-7, 2003b.

MAINARDI, F.; PAGNINI, G. J. Role of the Fox-Wright functions in fractional sub-diffusion of distributed order. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 207, n. 2, p. 245-257, 2007.

MALACARNE, L. C.; MENDES, R. S.; LENZI, E. K.; LENZI, M. K. General solution of the diffusion equation with a nonlocal diffusive term and a linear force term. **Physical Review E**, v. 74, n. 4, p. 042101-1-4, 2006.

MATHAI, A. M.; SAXENA, R. K. **The H-function with applications in statistics and other disciplines**. New Delhi: Wiley Eastern, 1978.

METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. **Physics Report**, v. 339, n. 1, p. 1-77, 2000.

METZLER, R.; BARKAI, E.; KLAFTER, J. Deriving fractional Fokker-Planck equations from a generalised master equation. **Europhysics Letters**, v. 46, n. 4, p. 431-436, 1999.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 1999.

RYABOV, Y. E. Behavior of fractional diffusion at the origin. **Physical Review E**, v. 68, n. 3, p. 030102-1-4, 2003.

REN, F. Y.; LIANG, J. R.; QIU, W. Y.; WANG, X. T.; XU, Y.; NIGMATULLIN, R. An anomalous diffusion model in an external force fields on fractals. **Physics Letters A**, v. 321, n. 3-4, p. 187-197, 2003.

SCHOT, A.; LENZI, M. K.; EVANGELISTA, L. R.; MALACARNE, L. C.; MENDES, R. S.; LENZI, E. K. Fractional diffusion equation with an absorbent term and a linear external force: Exact solution. **Physics Letters A**, v. 366, n. 4-5, p. 346-350, 2007.

SEKI, K.; WOJCIK, M.; TACHIYA, M. Fractional reaction-diffusion equation. **Journal Chemical Physics**, v. 119, n. 4, p. 2165, 2003.

SILVA, A. T.; LENZI, E. K.; EVANGELISTA, L. R.; LENZI, M. K.; DA SILVA, L. R. Fractional nonlinear diffusion equation, solutions and anomalous diffusion. **Physica A**, v. 375, n. 1, p. 65-71, 2007.

SOKOLOV, I. M.; CHECHKIN, A. V.; KLAFTER, J. Distributed-order fractional kinetics. **Acta Physica Polonica B**, v. 35, n. 4, p. 1323-1341, 2004.

UCHAIKIN, V. V.; SIBATOV, V. V. Fractional theory for transport in disordered semiconductors. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 13, n. 4, p. 715-727, 2008.

VALDES-PARADA, F. J.; OCHOA-TAPIA, A.; ALVAREZ-RAMIREZ, J. Effective medium equations for fractional Fick's law in porous media. **Physica A**, v. 373, n. 2, p. 339-353, 2007.

YUSTE, S. B.; ACEDO, L.; LINDENBERG, K. Reaction front in an $A+B \rightarrow C$ reaction-subdiffusion process. **Physical Review E**, v. 69, n. 3, p. 036126-1-10, 2004.

Received on April 22, 2008.
Accepted on June 3, 2008.